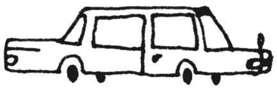
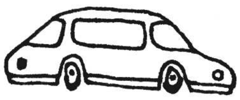
Informatyczny kącik olimpijski (46): Myjnia samochodowa

Zadanie omawiane w tym kąciku pochodzi z obozu treningowego drużyn rosyjskich z 2008 roku (autor zadania: Andrew Stankevich).





Do myjni ustawiła się długa kolejka samochodów (jest ich n), z których każdy należy wyczyścić w środku i umyć od zewnątrz. Dla samochodu numer i czynności te zajmują, odpowiednio, a_i oraz b_i sekund i są wykonywane niezależnie przez dwie różne osoby – jeden pracownik myje wszystkie samochody od zewnątrz, a drugi czyści wszystkie od wewnątrz. Każdy z pracowników może dowolnie ustalić kolejność czyszczenia samochodów. Każdy pracownik może pracować naraz tylko nad jednym samochodem i każdy samochód może być w jednej chwili czyszczony przez tylko jednego pracownika. Zadaniem jest takie ustalenie kolejności czyszczenia przez obu pracowników, żeby jak najszybciej zakończyć całą pracę.

W prawdziwej myjni prawdopodobnie liczby a_i nie różnią się zbytnio, podobnie jest w przypadku liczb b_i. Zachęcamy Czytelnika do zastanowienia się, czy dodatkowe założenie, że $\max_i a_i \leqslant 2 \min_i a_i$ i analogicznie dla b_i, pomaga w znalezieniu rozwiązania. W oryginalnym zadaniu jednak takich założeń nie było, zastanówmy się więc, jak je rozwiązać bez tego.

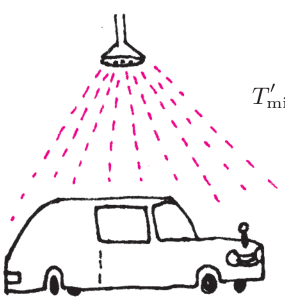
Oznaczmy przez T najkrótszy czas, w którym można zakończyć pracę. Łatwo zauważyć, że $T \geqslant \sum_i a_i$, $T \geqslant \sum_i b_i$ oraz $T \geqslant \max_i(a_i + b_i)$.

Niech $T_{\min} = \max(\sum_i a_i, \sum_i b_i, \max_i(a_i + b_i))$. Chcielibyśmy ułożyć plan, w którym $T = T_{\min}$.

Jeśli $T_{\min} = \max_i(a_i + b_i)$, rozważmy i_0, które realizuje to maksimum. Wiemy wówczas, iż $\sum_{i \neq i_0} a_i \leqslant b_{i_0}$ oraz $\sum_{i \neq i_0} b_i \leqslant a_{i_0}$, czyli możemy ustalić, że jeden z pracowników najpierw czyści wszystkie samochody poza i_0, a drugi w tym czasie czyści samochód i_0, po czym zamieniają się. W ten sposób otrzymujemy plan spełniający $T = T_{\min}$.

Pozostał nam przypadek, w którym $T_{\min} > \max_i(a_i + b_i)$. Możemy w nim bez straty ogólności założyć, że $T_{\min} = \sum_i a_i$. W takiej sytuacji przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Jeśli są co najwyżej dwa samochody, sprawa jest oczywista. Jeśli są dokładnie trzy, to nie mogą zachodzić jednocześnie nierówności $b_1 > a_2$, $b_2 > a_3$, $b_3 > a_1$, bo mielibyśmy, wbrew założeniom, $b_1 + b_2 + b_3 > a_1 + a_2 + a_3$. Bez straty ogólności załóżmy, że $b_2 \leqslant a_3$. Jeśli dodatkowo $b_1 + b_2 \leqslant a_2 + a_3$, to widzimy, że można ustawić samochody następująco: u pierwszego pracownika a_1, a_2, a_3, a u drugiego b_3, b_1, b_2. Jeśli zaś nie, to naturalnie $b_3 \leqslant a_1$, a stąd $b_2 + b_3 \leqslant a_3 + a_1$ i sytuacja jest zupełnie analogiczna.

Załóżmy w takim razie, że umiemy rozplanować czyszczenie dowolnych $n - 1$ samochodów, i zastanówmy się, jak wyczyścić dane n samochodów ($n \geqslant 4$). Niech dwoma samochodami o najmniejszej sumie $a_i + b_i$ będą te o numerach 1 i 2. Ustalmy, że samochód drugi będzie czyszczony przez każdego z pracowników tuż po pierwszym, oraz załóżmy dodatkowo, że w czasie, gdy jeden z pracowników czyści którykolwiek z tych samochodów, drugi pracownik nie może czyścić drugiego z tych samochodów. Innymi słowy, zamieniamy te dwa samochody w jeden, o współczynnikach $a = a_1 + a_2$ i $b = b_1 + b_2$. Dla nowego zestawu samochodów mamy:



$$T'_{\min} = \max((a_1 + a_2) + a_3 + \ldots + a_n, (b_1 + b_2) + b_3 + \ldots + b_n, \max_{i \geqslant 3}(a_i + b_i), a_1 + a_2 + b_1 + b_2) =$$

$$= \max\left(\sum_i a_i, \sum_i b_i, \max_i(a_i + b_i), a_1 + a_2 + b_1 + b_2\right) = \max(T_{\min}, a_1 + a_2 + b_1 + b_2).$$

Zauważmy, że z wyboru samochodów 1 i 2 wynika, że $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leqslant \frac{1}{2} \sum_i (a_i + b_i)$. Stąd $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leqslant \sum_i a_i$, czyli ostatecznie $T'_{\min} = T_{\min}$. Z założenia indukcyjnego $n - 1$ otrzymanych po zamianie samochodów można wyczyścić w czasie $T_{\min}$, a więc tym bardziej wyjściowe n samochodów można wyczyścić w czasie $T_{\min}$. To pokazuje, że $T_{\min}$ jest szukanym minimalnym czasem czyszczenia samochodów w dowolnym przypadku.

Zauważmy, że nasz dowód jest w pełni konstruktywny: tak długo, jak $n \geqslant 4$ i $T_{\min} > \max_i(a_i + b_i)$, wybieramy dwa samochody o najmniejszej sumie $a_i + b_i$ i łączymy je w jeden. Przy użyciu odpowiedniej struktury danych (chociażby kopca) tę procedurę można zrealizować w czasie $O(n \log n)$. Następnie rozwiązujemy problem dla trzech samochodów lub dla przypadku $T_{\min} = \max_i(a_i + b_i)$, co możemy wykonać w czasie stałym lub, odpowiednio, $O(n)$. Na końcu odzyskujemy rozwiązanie całości poprzez podstawianie, kolejno, par samochodów w miejsce tych sztucznie stworzonych.

Tomasz KULCZYŃSKI

Rozwiązanie zadania F 797.
Sznurek ma minimalną prędkość przejścia wtedy, gdy środek masy części sznurka o długości $2\pi r$ i masie $m = 2\pi M r / l$ zostaje podniesiony na wysokość r:

$$\frac{1}{2} M v_{\min}^2 = mgr.$$

Stąd $v_{\min} = 2r\sqrt{\pi g / l}$.