W przestrzeni łatwiej!

Joanna JASZUŃSKA

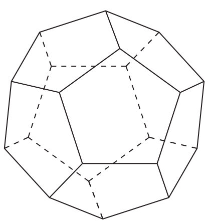
Niektóre zadania z geometrii płaskiej łatwiej najpierw rozwiązać w przestrzeni, a później dopiero z powrotem je „spłaszczyć”. Liczne przykłady pojawiły się w *deltoidach* 17 i 18. Oto jeszcze dwa tego rodzaju problemy.

1. Znajdź na płaszczyźnie skończenie wiele okręgów o rozłącznych wnętrzach i takich, że każdy jest styczny do dokładnie pięciu z pozostałych.

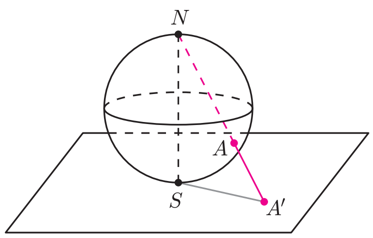
2. 32 proste dzielą koło o promieniu 10 cm na pewną liczbę części. Udowodnij, że w jednej z nich da się zmieścić okrągły guzik o promieniu 3 mm.

Rozwiązania

R1. Każdy z okręgów wpisanych w ściany dwunastościanu foremnego (rys. 1) jest styczny do pięciu z pozostałych. Jak „spłaszczyć” tę konfigurację, aby okręgi pozostały okręgami i spełniały żądane własności?



Rys. 1

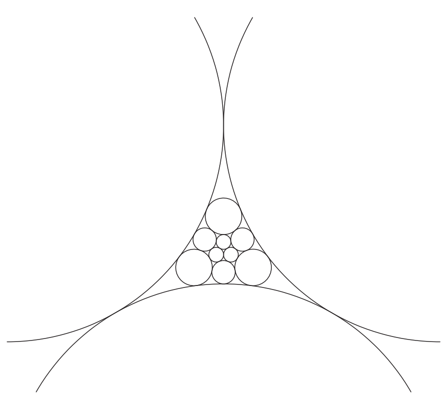


Rys. 2

Dygresja. Na nieograniczonym stole stoi przezroczysta sfera. W „najwyższym” punkcie N tej sfery, przeciwległym do punktu S styczności ze stołem, zapalamy żarówkę. Zaznaczamy na powierzchni sfery dowolny punkt $A \neq N$, a na stole jego cień A'. Taki A' nazywamy *rzutem stereograficznym* punktu A (rys. 2). Rzut ten działa na punktach rozważanej sfery tak, jak inwersja o środku N i promieniu NS.

Rzut stereograficzny ma mnóstwo sympatycznych własności. Na przykład okręgi nieprzechodzące przez N przeprowadza na okręgi oraz zachowuje styczność.

Wracając do rozwiązania zadania, zauważmy, że każdy z naszych 12 okręgów leży na powierzchni sfery wpisanej w krawędzie wyjściowego dwunastościanu. Sfera ta jest bowiem styczna do każdej krawędzi w jej środku, a przekrój sfery płaszczyzną ściany to właśnie okrąg wpisany w tę ścianę.



Rys. 3 (wykonał Wojciech Guzicki)

Niech N będzie dowolnym z punktów sfery, leżących na zewnątrz wszystkich okręgów. Rzut stereograficzny z N przeprowadza naszą przestrzenną konfigurację na szukaną płaską konfigurację okręgów (rys. 3). □

Nieco inne rozwiązanie zadania 1 opisano w *Klubie 44 M* w *Delcie* 5/2011.

R2. Zaznaczmy wzdłuż każdej z danych 32 prostych kolorowy pas o szerokości 3 mm w każdą stronę:

Środek guzika nie może należeć do żadnego z pasów (dlaczego?). Podobnie środek guzika nie może być w odległości mniejszej niż 3 mm od brzegu koła. Zamiast danego koła rozważajmy więc mniejsze koło K, współśrodkowe z nim, o promieniu 97 mm. Czy jest możliwe, aby kolorowe pasy pokryły całe koło K? Jeśli nie, to dowolny z niepokrytych punktów „nadaje się” jako środek guzika. Jak oszacować pole powierzchni koła przykrytej przez pasy?

Dygresja. Lemat o pomarańczy. *Jeśli pomarańczę (kulę o promieniu r) pokrojono na plastry jednakowej grubości h, to każdy z nich ma taką samą powierzchnię skórki* ($2\pi rh$).

Dowód znaleźć można np. w *Delcie* nr 3/2006.

Wracając do rozwiązania zadania, spójrzmy na nasze koło K z pasami jako na rzut (widok z góry) pewnej kuli, wtedy pasy te odpowiadają plastrom. Wobec tego łączne pole 32 pasów na powierzchni kuli równe jest co najwyżej $32 \cdot 2\pi \cdot 97 \cdot 6$. Tymczasem powierzchnia kuli o promieniu 97 mm równa jest $4\pi \cdot 97^2$, czyli więcej. Zatem pasy nie pokrywają całej kuli, więc ich rzuty nie pokrywają całego koła K i w dowolnym z niepokrytych punktów możemy umieścić środek guzika o promieniu 3 mm, co kończy dowód. □

Uwaga. Suma szerokości 32 pasów z powyższego rozwiązania równa jest 192 mm, więc ułożone równolegle obok siebie nie wystarczyłyby do pokrycia koła K o promieniu 97 mm. Dowiedliśmy, że żadne inne ich ułożenie też nie wystarcza. W 1932 r. A. Tarski postawił ogólniejszy problem: *Figura wypukła ma w najwęższym miejscu szerokość d. Czy da się ją przykryć pasami o sumie szerokości mniejszej od d?* W 1951 r. T. Bang wykazał, że odpowiedź jest negatywna.