Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W grudniu 2010 roku ukazał się drugi tom serii wydawniczej *Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej* zatytułowany *Matematyka. Poszukuję – odkrywam*. Materiały w nim zawarte stanowią opracowania referatów wygłoszonych w ramach konferencji *Konkursy matematyczne w Polsce*, zorganizowanej w 2008 roku przez Uniwersytet Warszawski we współpracy ze Stowarzyszeniem na rzecz Edukacji Matematycznej.

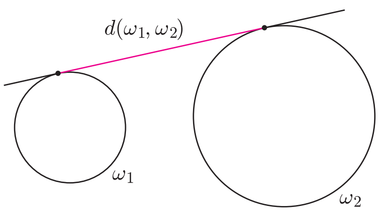
Ze zbioru *Matematyka. Poszukuję – odkrywam* dowiemy się między innymi:

- w jaki sposób dobra znajomość *wzorów skróconego mnożenia* oraz technik ich stosowania może pomóc w rozwiązywaniu zadań olimpijskich,
- *jak grać, żeby wygrać*, czyli jak rozstrzygnąć, czy dla opisanej w zadaniu gry któryś z graczy ma strategię wygrywającą,
- jak sobie radzić z *dowodzeniem nierówności*, gdy domyślamy się idei rozwiązania, ale problemy nastręcza ustalenie szczegółów,
- z jakich faktów warto korzystać, wykazując, że zadane *cztery punkty leżą na jednym okręgu.*

W publikacji znajdziemy ponadto pierwszy plakat wydany przez Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej *Równe sumy pól* wraz z omówieniem zawierającym dowody przedstawionych na nim zależności, a także ciekawe *uogólnienie twierdzenia Ptolemeusza*, którego najprostszą wersję przytaczam poniżej, zachęcając jednocześnie Czytelników do zapoznania się ze szczegółami zawartymi w broszurze.

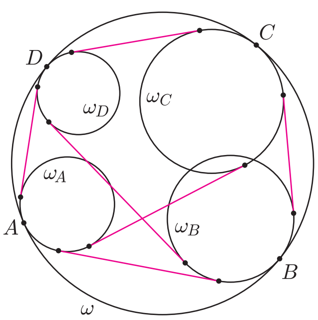
Twierdzenie Ptolemeusza głosi: *w czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków.*

Zdefiniujmy *odległość styczną* $d(\omega_1, \omega_2)$ pary okręgów jako odległość punktów styczności tych okregów do ich wspólnej stycznej zewnętrznej (rys. 1).



Rys. 1

Rozważmy okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ wszystkie styczne wewnętrznie (lub wszystkie styczne zewnętrznie) do okręgu ω w wierzchołkach czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 2).



Rys. 2

Spełniona jest wówczas następująca równość:

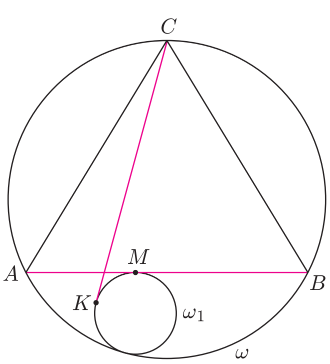
$$d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D) = d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_A, \omega_D).$$

Zauważmy, że twierdzenie Ptolemeusza jest rzeczywiście jej szczególnym przypadkiem, który zachodzi, gdy okręgi $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ są punktami, czyli okręgami zdegenerowanymi.

Powyższe twierdzenie, zwane *twierdzeniem Caseya*, pozwala w wielu przypadkach podać bardzo krótkie dowody użytecznych faktów. Zobaczmy, jak możemy je wykorzystać do rozwiązania następującego zadania:

W koło o okręgu ω wpisano trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. W odcinek koła wyznaczony przez cięciwę AB, do którego nie należy punkt C, wpisano okrąg ω_1. Z punktu C poprowadzono prostą styczną do okręgu ω_1 w punkcie K. Wykaż, że długość odcinka CK nie zależy od wyboru okręgu ω_1.

Oznaczmy przez M punkt styczności okręgu ω_1 z prostą AB (rys. 3).



Rys. 3

Zastosujmy twierdzenie Caseya do okręgów zdegenerowanych B, C, A i okręgu ω_1. Korzystając z tego, że $d(A, \omega_1) = AM$, $d(B, \omega_1) = BM$ oraz $d(C, \omega_1) = CK$, otrzymujemy równość $AB \cdot CK = AC \cdot BM + BC \cdot AM$. Stąd $AB \cdot CK = AB \cdot AC$, czyli $CK = AC$, co kończy rozwiązanie zadania.

Więcej o broszurze *Matematyka. Poszukuję – odkrywam* można przeczytać na stronie internetowej www.omg.edu.pl.

Joanna OCHREMIAK