delta
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Zadania Olimpiady Informatycznej będą opublikowane w *Delcie* 11/2011

Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2011/2012

LV Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 10 października 2011 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej Olimpiady Astronomicznej: `http://planetarium.edu.pl/oa.htm`.

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 14 listopada 2011 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod poniższym adresem w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi), imię i nazwisko nauczyciela fizyki. **Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika dostępną na stronie internetowej olimpiady.**

10. Zawody II stopnia odbędą się **16.01.2012 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 8 do 11 marca 2012 r.**

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. W 2008 roku doniesiono, że planetoida podwójna 2001 QW_{322} składa się z prawie identycznych składników poruszających się wokół wspólnego środka masy. Średnia odległość między nimi wynosi około 240 tysięcy km, a okres obiegu około 27 lat. Oszacuj, jak trwałym obiektem jest ta podwójna planetoida, przyjmując, że jej orbita jest kołowa. W tym celu oblicz, ile energii trzeba dostarczyć, aby układ ten rozseparować.

2. Przedstaw graficznie zmiany długości dnia w ciągu roku w Jastrzębiej Górze i Ustrzykach Górnych. Przyjmij, że moment wschodu i zachodu Słońca następuje wtedy, gdy środek tarczy słonecznej znajduje się na wysokości $h = -51'$. Podaj wnioski wynikające z porównania tych wykresów. Niezbędne dane liczbowe wyszukaj samodzielnie.

3. Przyjmując dane liczbowe zamieszczone w tabelce, oblicz długość doby słonecznej na Merkurym i Wenus, przy założeniu orbit kołowych obu planet.

Planeta	Okres obiegu wokół Słońca [doby]	Gwiazdowy okres rotacji [doby]
Merkury	87,969	58,647
Wenus	224,70	−243,02

Uwaga: Znak minus przy okresie rotacji Wenus oznacza obrót wsteczny.

4. Sztucznego satelitę Ziemi zaobserwowano w apogeum jego orbity. Wyznaczona odległość satelity od środka Ziemi wynosiła wtedy d kilometrów, a geocentryczna prędkość kątowa satelity wynosiła ω radianów na sekundę. Zakładamy również znajomość masy Ziemi M_Z. Wyprowadź wzór pozwalający z tych danych obliczyć, po jakim czasie od momentu dokonanych pomiarów należałoby obserwować satelitę, aby prześledzić jego ruch w pobliżu perygeum. Położenie obserwatora, kształt i usytuowanie orbity umożliwiają obserwację obu tych położeń satelity na orbicie.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.

1. Wykonaj fotografię okolicy zenitu w taki sposób, aby było możliwe określenie jego położenia. Na podstawie otrzymanej fotografii wyznacz szerokość geograficzną miejsca swojej obserwacji.

2. Dokonaj zliczeń gwiazd na kilku wykonanych przez siebie fotografiach nieba zrobionych tym samym aparatem fotograficznym. Wyznacz szacunkową liczbę gwiazd na całej sferze niebieskiej, będących w zasięgu tego aparatu. Załóż, że gwiazdy są rozłożone na niebie losowo.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 14 listopada 2011 r.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych.*
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami.*
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką.*
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów.*
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie.*
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.

LXI Olimpiada Fizyczna
Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

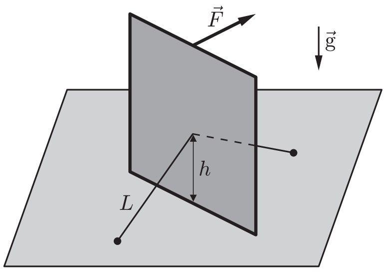
część I – do 15 października br., **część II – do 15 listopada br.**

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej `www.kgof.edu.pl`.

Część I

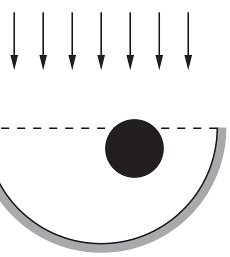
Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksymalnie 4 punkty.



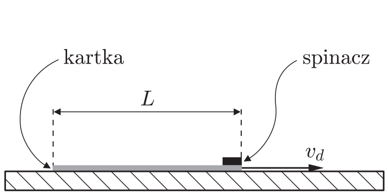
Rys. 1

1. Sztywna płyta stoi pionowo na podłodze. Aby unieruchomić ją w tej pozycji, postanowiono umocować ją za pomocą dwóch lin długości L każda (patrz rysunek 1). Niech F będzie prostopadłą do powierzchni płyty siłą przyłożoną do górnej krawędzi płyty, powodującą zerwanie jednej z lin. Na jakiej wysokości h liny powinny być przymocowane do płyty (dobierając przy tym odpowiednie miejsce zamocowania w podłożu), aby F było jak najmniejsze? Zakładamy, że liny są bardzo mało rozciągliwe i nie ulegają wyrwaniu ani z mocowania w podłożu, ani z mocowania w płycie. Wysokość płyty jest większa niż L, a jej dolna krawędź nie przesuwa się.



Rys. 2

2. Mamy do dyspozycji idealne półsferyczne lustro o promieniu R (rysunek 2). Oś optyczna lustra jest ustawiona w kierunku Słońca. W którym miejscu należy umieścić czarną, metalową kulkę o promieniu $R/4$, aby jak najszybciej się ona nagrzała? Przyjmij, że promienie światła ze Słońca tworzą wiązkę równoległą.



Rys. 3

3. Na poziomym, długim stole leży kartka papieru długości L, a na kartce, tuż przy jej krótszej krawędzi, leży spinacz biurowy. Współczynnik tarcia między kartką a spinaczem wynosi μ. W pewnym momencie kartce nadajemy (w przybliżeniu natychmiastowo) prędkość v_d (patrz rysunek 3). Ile powinno wynosić v_d, aby nadać spinaczowi jak największą prędkość względem stołu? Rozmiary spinacza są małe w porównaniu z L.

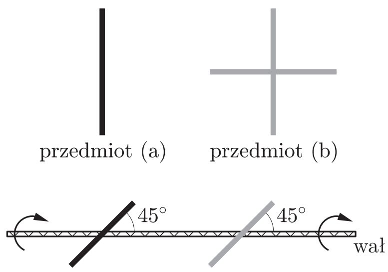
4. Wokół pewnej planety krąży wielki wąż w pozycji pionowej (wzdłuż promienia poprowadzonego do planety), na stałej wysokości nad planetą. W pewnej chwili wąż zwinął się w niewielki kłębek. Czy jego orbita będzie kołowa, czy zacznie się on oddalać od planety, czy zbliżać do niej?

5. Gdy na pewną płytkę płasko-równoległą z bezbarwnego szkła pada prostopadle wiązka światła o natężeniu I_0, to natężenie wiązki przechodzącej wynosi $p \cdot I_0$, a wiązki odbitej $(1-p) \cdot I_0$. Jakie będzie natężenie wiązki przechodzącej przez dwie takie płytki, umieszczone równolegle jedna za drugą? W rozważanym przypadku nie występuje interferencja (wiązka nie jest koherentna).

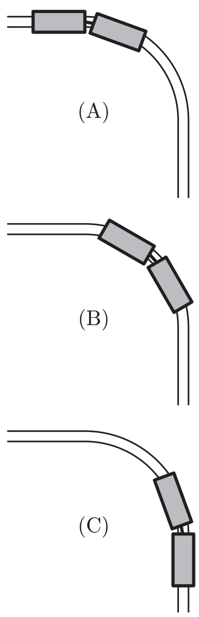
6. Czy skacząc na bungee można zwiększyć minimalną odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi, jeśli nasza prędkość początkowa będzie niezerowa? Przyjmij, że guma bungee spełnia prawo Hooka i pomiń opór powietrza.

7. Są ludzie, którzy twierdzą, że Elvis Presley nadal żyje. Podaj przykład obserwatora (jego odległość i prędkość wraz z kierunkiem i zwrotem), dla którego w chwili (mierzonej przez ciebie), gdy piszesz rozwiązanie tego zadania, jest to prawda. Przyjmij w przybliżeniu, że Elvis umarł w miejscu, w którym się znajdujesz. Potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

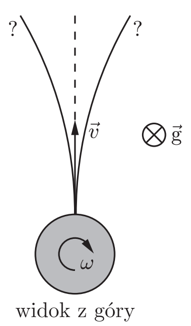
8. Działo elektromagnetyczne składa się z dwóch równoległych, odległych o d, poziomych, bardzo długich szyn, po których porusza się prostopadła do szyn, łącząca je metalowa belka o masie m. Szyny znajdują się w pionowym polu magnetycznym o natężeniu B. Jaka jest prędkość graniczna belki, jeśli do szyn podłączymy napięcie U? Pomiń opory ruchu belki.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

9. Rozważmy dwa przedmioty o takich samych masach (patrz rysunek 4): a) jednorodny pręt, b) tworzące krzyż dwa jednorodne pręty. Dla każdego z tych przedmiotów moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do niego jest taki sam. Każdy z tych przedmiotów umocowano na cienkim wale, tworzącym z nim kąt 45° (patrz rysunek 4), a następnie zaczęto obracać wałem (i przedmiotami) ze stałą prędkością kątową. W przypadku którego przedmiotu moment siły, z jakim działa on na wał, jest większy?

10. Wszystkie linie kolejowe w Paflagonii są kręte. Koleje Paflagońskie korzystają z tego, stosując w swoich pociągach nowatorski system napędu: silniki zginają lub wyprostowują złącza międzywagonowe. W których momentach (patrz rysunek 5) silnik powinien działać w kierunku zgięcia, a w których – w kierunku wyprostowania złącza?

11. Jaki jest maksymalny zasięg strzału na Księżycu pocisku wylatującego z działa z prędkością 1800 m/s? Potrzebne dodatkowe dane wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

12. W pewnej odległości od ładunku punktowego q znajduje się mała, dielektryczna kulka. Jak zmieni się (ile razy wzrośnie/zmaleje) wartość siły elektrostatycznej działającej na tę kulkę, jeśli dwukrotnie wzrośnie wartość ładunku punktowego?

13. Jednorodnemu walcowi nadano pewną prędkość kątową wokół jego osi, a następnie nadano mu prędkość $\vec{v}$ wzdłuż podłogi (patrz rysunek 6). Zauważono, że jeśli wysokość walca nie jest mała w porównaniu z jego promieniem, to tor ruchu walca odchyla się w porównaniu z kierunkiem $\vec{v}$. W którą stronę i dlaczego? Podłoga jest pozioma, a walec styka się z nią podstawą. Pomiń wpływ powietrza, ale uwzględnij tarcie walca o podłogę.

14. Na małą kulkę metalową (średnicy np. 3 mm) skierowano wiązkę światła laserowego i obserwowano cień kulki na ekranie. Jeśli ktoś twierdzi, że widział jasny punkt w środku cienia, to dlatego, że: a) uległ złudzeniu optycznemu wynikającemu z kontrastu cienia z jasnym otoczeniem, b) w kulce musiał być niewielki otworek (kanalik), c) światło lasera jest tak silne, że wiązka przenika przez kulę, d) przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła, e) przyczyną zjawiska jest poprzeczny charakter fali świetlnej i przejście polaryzacji liniowej w kołową.

15. W magazynie paliwa jądrowego znajdują się kule o identycznym promieniu i identycznej wadze, zawierające pluton pokryty pochłaniającą promieniowanie powłoką z ołowiu. Niektóre kule zawierają czysty izotop ^{238}Pu (okres połowicznego rozpadu 87,7 lat), a inne – czysty izotop ^{244}Pu (okres połowicznego rozpadu ponad 80 milionów lat). Niestety, oznaczenia na kulach się zagubiły. Jaka najprostsza metoda pozwoli na odróżnienie kul bez uszkadzania ochronnej warstwy ołowiu?

Część II

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy, nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

Zadania teoretyczne

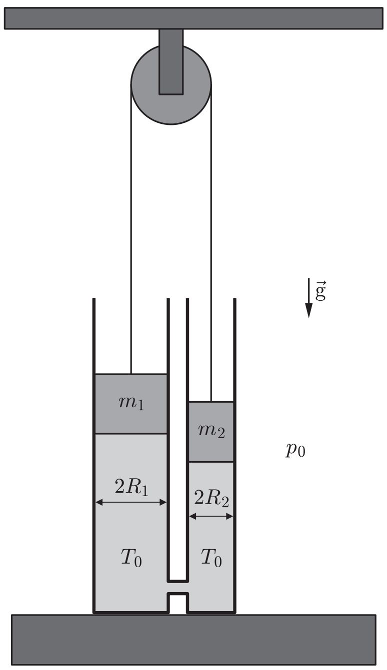
Przesłać należy rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

T1. Dwa pionowo ustawione cylindry o promieniach wewnętrznych odpowiednio R_1 oraz R_2 zamknięte są od góry szczelnymi, mogącymi się swobodnie przesuwać tłokami. Cylindry połączone są rurką, a w ich wnętrzu znajduje się gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości równym C_V. Tłoki połączone są linką przerzuconą przez bloczek (patrz rysunek 7).

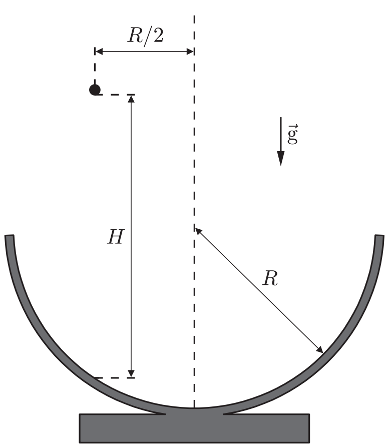
Początkowo układ jest w równowadze mechanicznej i termodynamicznej, przy czym liczba moli gazu wynosi n, jego temperatura – T_0, a linka jest napięta.

- Ile ciepła należy dostarczyć do gazu, aby jego temperatura wzrosła o ΔT?
- O ile przesuną się przy tym tłoki?

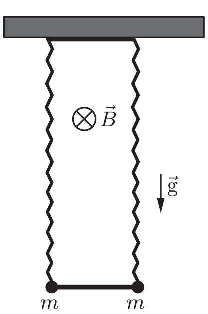
Przyjmij, że gaz nie oddaje ciepła cylindrom, tłokom, rurce ani otoczeniu. Gaz jest tak podgrzewany, że jego temperatura w obu cylindrach jest stale taka sama i zmienia się bardzo powoli. Pomiń tarcie. Na zewnątrz układu znajduje się powietrze o ciśnieniu p_0. Masy cylindrów wynoszą odpowiednio m_1 oraz m_2. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla $\Delta T = 10$ K, $C_V = \frac{5}{2}R$, $R_1 = 0{,}05$ m, $R_2 = 0{,}03$ m, $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 1$ kg, $n = 0{,}05$ mol, $T_0 = 300$ K, $p_0 = 10^5$ Pa, $\mathrm{g} = 9{,}81$ m/s^2. Uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}3$ J/(mol $\cdot$ K).

T2. Małą kulkę puszczono swobodnie z pewnej wysokości do wnętrza kulistej czaszy o promieniu R (patrz rysunek 8). Odległość punktu, z którego puszczono kulkę, od osi czaszy wynosi $R/2$. Po czterokrotnym odbiciu się od wnętrza czaszy, kulka powróciła do miejsca z którego została puszczona. Jaka była początkowa wysokość H kulki nad miejscem jej pierwszego odbicia?

Odbicia są doskonale sprężyste. Pomiń opór powietrza i ruch obrotowy kulki. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

T3. Na dwóch identycznych, metalowych sprężynach o współczynnikach sprężystości k wiszą dwa identyczne ciężarki o masie m każdy. Sprężynki znajdują się w odległości l od siebie, a ich dolne końce połączone są sztywnym, metalowym prętem o pomijalnie małej masie. Sprężynki połączone są w punkcie zawieszenia przewodem elektrycznym. Cały układ znajduje się w prostopadłym do jego płaszczyzny jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (patrz rysunek 9). Całkowity opór elektryczny obwodu wynosi R.

Wyznacz stosunek ciepła wytwarzanego w obwodzie w trakcie jednego drgania do energii mechanicznej układu, jeśli w chwili początkowej ciężarki spoczywają w odległościach odpowiednio z_1 oraz z_2 poniżej ich położenia równowagi, gdzie:

- $z_1 = d$, $z_2 = d$;
- $z_1 = -d$, $z_2 = d$;
- $z_1 = 0$, $z_2 = d$.

Dla każdego z rozpatrywanych przypadków opisz ruch układu po bardzo długim czasie.

Pole magnetyczne wytwarzane przez obwód jest pomijalnie małe w porównaniu z B. Pomiń też opór powietrza i masy sprężyn. Przyjmij, że sprężyny pozostają stale pionowe ($d \ll l$), nie wyginają się, a ich rozmiary poprzeczne (szerokość nawinięcia) są małe w porównaniu z d. Załóż, że ciepło wydzielane w obwodzie w trakcie jednego drgania jest bardzo małe w porównaniu z energią mechaniczną układu (ale całkowite ciepło wydzielone po rozpatrywanym w drugim poleceniu bardzo długim czasie jest porównywalne z tą energią).

Dla każdego z rozpatrywanych przypadków podaj wartość liczbową szukanego współczynnika dla $B = 0{,}05$ T, $l = 0{,}2$ m, $R = 0{,}1$ Ω, $k = 100$ N/m, $m = 0{,}1$ kg, $d = 0{,}01$ m.

T4 (numeryczne). Rozważmy ośrodek optyczny o współczynniku załamania zależnym od współrzędnej y

$$n(x, y) = n_0 + by^2,$$

gdzie $n_0 = 10$, $b = -10\ \frac{1}{\mathrm{m}^2}$. Będziemy rozważali bieg promieni światła w płaszczyźnie (x, y).

a) Przedstaw na wykresie biegi promieni, które wylatują z punktu $x = 0$, $y = 0$ dla kątów α_0, jakie te promienie tworzą z osią y w punkcie początkowym, równych 10°, 20°, 30°, 45°, 50°, 55°, 65°, 70°, 75°, 80°, 85°, 86°, 87°, 88°, 89°, 90°. Skalę i wielkość wykresu dobierz tak, by był na nim widoczny przebieg każdego z wymienionych promieni, z wyjątkiem odpowiadającego $\alpha_0 = 90°$, od punktu początkowego aż do przecięcia z osią $y = 0$.

b) Czy na podstawie wykresu z punktu a) można przyjąć, że dla pewnego zakresu kątów α_0 promienie ogniskują się w przybliżeniu w jednym miejscu (ognisku)? Jeśli tak, podaj położenie tego ogniska.

Wskazówka: Z prawa załamania wynika, że w rozważanym przypadku kąt, jaki promień tworzy promień z osią y, jest wyznaczony przez współrzędną y i warunki początkowe. Na tej podstawie można określić schemat postępowania pozwalający wyznaczyć bieg promienia:

- ustawiamy „foton" w punkcie początkowym;
- przesuwamy „foton" o małą odległość d zgodnie z kierunkiem promienia;
- na podstawie prawa załamania wyznaczamy w nowym położeniu nowy kierunek promienia.

Punkty 1 i 2 powtarzamy, aż nasz foton osiągnie oczekiwane miejsce. Odległość d powinna być tak dobrana, aby jej zmniejszenie nie powodowało widocznej na rysunku zmiany biegu promienia.

Uwaga: Prawo załamania nie zawsze jednoznacznie określa dalszy bieg promienia, bo $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$ – np. w przypadku odbicia sinus kąta padania jest równy sinusowi kąta załamania i dalszy bieg promienia wyznaczamy na podstawie dodatkowych rozważań.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

D1. W najprostszym przybliżeniu optyki geometrycznej soczewka skupiająca ogniskuje równoległą wiązkę światła w punkcie. Jednak w rzeczywistości w ognisku soczewki wiązka ma skończone rozmiary, które zależą od parametrów wiązki przed soczewką (np. jej średnicy), kształtu soczewki i długości fali światła. Okazuje się, że skupiająca soczewka płasko-wypukła inaczej ogniskuje światło, jeśli wiązka pada od płaskiej strony soczewki, a inaczej jeśli od strony wypukłej. Jest to związane z tym, że w pierwszym przypadku promienie załamują się tylko na jednej powierzchni soczewki, zaś w drugim na obu powierzchniach. Mając do dyspozycji

- płasko-wypukłą soczewkę o ogniskowej 15–25 centymetrów,
- wskaźnik laserowy,
- ekran do oglądania wiązki (najlepsza jest gładka, czarna powierzchnia),
- kamerę internetową z możliwością regulacji ostrości podłączoną do komputera albo aparat cyfrowy,
- program do obróbki plików graficznych (np. GIMP, `http://www.gimp.org/`),

zbadaj rozmiary ogniska, gdy wiązka światła pada

- od strony płaskiej soczewki,
- od strony wypukłej soczewki.

Oszacuj stosunek rozmiarów ogniska przy obu ustawieniach soczewki.

Uwaga 1: Światło laserowe ze wskaźnika może uszkodzić wzrok! Uważaj, by nie świecić wiązką laserową, również odbitą, w oko. Jeśli uznasz za konieczne, możesz użyć płaskich płytek szklanych (np. mikroskopowych szkiełek podstawowych) w celu zmniejszenia natężenia wiązki.

Uwaga 2: Wskaźnik laserowy powinien być ustawiony w takiej odległości od soczewki, aby średnica padającej na soczewkę wiązki światła wynosiła około 1 centymetra.

Uwaga 3: Aby zarejestrować obraz ogniska z dużym powiększeniem, potrzebna jest kamera lub aparat z możliwością regulacji ostrości, mogące wykonywać ostre zdjęcia z małej odległości (kilka centymetrów).

Uwaga 4: W typowej kamerze cyfrowej stosuje się korekcję skali natężenia: można przyjąć, że zapisywana do pliku wartość sygnału I_{PLIK} ma się do rzeczywistego natężenia światła padającego na piksel kamery I_{KAMERA} zgodnie z formułą $I_{\mathrm{PLIK}} = I_{\mathrm{KAMERA}}^{0,7}$.

D2. Wyobraźmy sobie, że rejestrujemy pewne przypadkowe, powtarzające się zdarzenia, może to być na przykład przejazd samochodu ulicą albo zaobserwowanie meteoru na niebie. Przyjmijmy, że zdarzenia te są niezależne, to znaczy żadne z nich nie wpływa na wystąpienie innego. Prawdopodobieństwo $p(n)$ wystąpienia n takich zdarzeń w ustalonym przedziale czasu jest równe $p(n) = \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda}/n!$, gdzie λ jest średnią liczbą zdarzeń w przedziale czasu. Taka zależność $p(n)$ nazywana jest rozkładem Poissona. Rozkład Poissona opisuje bardzo wiele procesów w fizyce, np. rozpady jądrowe czy rejestrację fotonów z lasera. Mając do dyspozycji:

- arkusz folii naciągniętej na sztywną ramę albo blachę o powierzchni kilku-kilkunastu decymetrów kwadratowych,
- dyktafon cyfrowy, komputer z kartą dźwiękową i mikrofonem albo telefon komórkowy z możliwością zapisu dźwięku,
- komputer z programem pozwalającym analizować pliki dźwiękowe (np. Audacity, `http://audacity.sourceforge.net/`),

zbadaj, czy podczas deszczu liczba kropli spadających w ustalonym przedziale czasu (np. 1 sekundy) na ustaloną powierzchnię opisana jest rozkładem Poissona. Wykonaj pomiary dla kilku różnych wartości średniej λ w zakresie [0,5, 5]. Sprawdź, czy zmierzone rozkłady są zgodne z rozkładem Poissona dla wybranych wartości średniej λ. W przypadku braku naturalnego deszczu możesz posłużyć się prysznicem albo ogrodowym wężem.

D3. Mając do dyspozycji

- dwa jednakowe baloniki,
- papier milimetrowy,
- zegar,
- dwutlenek węgla,
- centymetr krawiecki,
- kamerę internetową,

sprawdź, czy dla zawiązanego szczelnie balonika wypełnionego CO_2 zależność objętości gazu w baloniku w funkcji czasu można opisać funkcją $V(t) = A\mathrm{e}^{-t/t_0} + V_0$. Jeśli tak, to wyznacz czas charakterystyczny szybkości dyfuzji dwutlenku węgla t_0. Porównaj zależność $V(t)$ zaobserwowaną dla balonika wypełnionego CO_2 ze zmianą objętości takiego samego balonika wypełnionego powietrzem.

Uwaga: W warunkach domowych dwutlenek węgla można uzyskać z napoju gazowanego lub w wyniku reakcji sody oczyszczonej z kwaskiem cytrynowym.

LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2011 r. – I seria,
3 listopada 2011 r. – II seria,
5 grudnia 2011 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z, \\ (y+z)^3 = 8x, \\ (z+x)^3 = 8y. \end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y), że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $SE = SF$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n-(b-a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n, sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

II seria

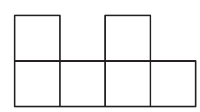
5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \ldots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n), dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x+y)) = f(x-y) + f(x)^2.$$

III seria

9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 1$, że liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1 + 2^n + 4^n$.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geqslant 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA', BB', CC', SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1, 1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1, 2, 1)$, w drugim kroku ciąg $(1, 3, 2, 3, 1)$ itd.

Dla każdego $n \geqslant 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n-tym kroku.

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, **numer PESEL**, adres domowy, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 24 października 2011 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem `www.omg.edu.pl`.

Uwaga: W roku szkolnym 2011/2012 Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów zostanie przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego, odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym, zostaną w bieżącej edycji rozbudowane o część testową. Więcej informacji na stronie `www.omg.edu.pl`.

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, dla których

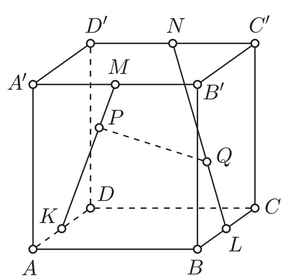
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x+y\,?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Punkt D leży na boku AB, przy czym $BD=2AD$, a kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta BAC.

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.



5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b, dla których liczba

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ także są wymierne.

7. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami krawędzi $AD, BC, A'B', C'D'$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach KM i LN. Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że $PQ \geqslant \sqrt{2}$.

Lista laureatów Olimpiad 2011/12 będzie zamieszczona w *Delcie* 6/2012