Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2011

Zadania z matematyki nr 625, 626

Redaguje Marcin E. KUCZMA

625. Okręgi o środkach P i Q przecinają się w punktach A i B; promienie PA i QA nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina te dwa okręgi w punktach D i E (różnych od A) oraz przecina prostą AB w punkcie C (różnym od A). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BDE ma środek w punkcie C.

626. Dana jest liczba $a > 0$. Określamy ciągi (x_n) oraz (y_n):

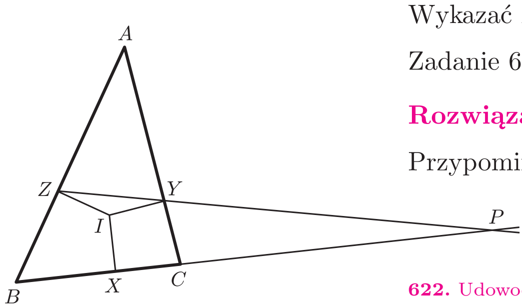
$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{dla } n \geqslant 1; \quad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \ldots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (y_n).

Zadanie 626 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2011

Przypominamy treść zadań:



621. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Proste BC i YZ przecinają się w punkcie P. Dowieść, że proste IP i AX są prostopadłe.

622. Udowodnić nierówność

$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$

dla liczb $x, y, z \geqslant 0$.

621. Prosty rachunek na wektorach: styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności, więc $\overrightarrow{IX} \cdot \overrightarrow{XP} = 0$, $\overrightarrow{IY} \cdot \overrightarrow{YA} = 0$. Punkt P leży na prostej YZ, prostopadłej do IA; zatem $\overrightarrow{YP} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$.

Chcemy wykazać, że wektory $\overrightarrow{IP}$ i $\overrightarrow{AX}$ są prostopadłe. Obliczamy ich iloczyn skalarny:

$$\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{IP} \cdot (\overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IX} - (\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{YP}) \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IY} \cdot \overrightarrow{IA} =$$
$$= (\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{XP}) \cdot \overrightarrow{IX} - \overrightarrow{IY} \cdot (\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{YA}) = |IX|^2 - |IY|^2 = 0.$$

Tak więc $IP \perp AX$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 613 ($WT = 2{,}66$) i 614 ($WT = 1{,}53$) z numeru 1/2011

Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,34
Paweł Najman	Kraków	37,76
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Piotr Sobczak	Łódź	34,73
Paweł Kubit	Kraków	32,79

622. Ponieważ $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$, nierówność dana do udowodnienia jest równoważna następującej:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} \geqslant \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+y+z}.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $y \leqslant z$.

Jeżeli $x \geqslant y$, to w ostatniej nierówności lewa strona jest nieujemna, prawa jest niedodatnia i nie ma czego dowodzić.

Gdy zaś $x < y$, możemy tak przekształcać lewą stronę i szacować ją z dołu, by uzyskać wyrażenie widoczne po prawej stronie:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} = \frac{y}{(1+x)(1+x+y)} >$$
$$> \frac{y}{(1+x+z)(1+x+y)} > \frac{y}{(1+x+z)(1+z+y)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{y-x}{(1+x+z)(1+z+y)} = \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+z+y}.$$

Rozwiązanie zadania M 1326.
Każdemu listowi przypisujemy dwuelementowy zbiór osób, złożony z nadawcy i adresata. Jest $\binom{100}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$ takich zbiorów i $100 \cdot 50 = 5000$ wysłanych listów. Ponieważ $5000 > 4950$, więc pewnym dwóm listom przypiszemy ten sam zbiór. Te listy muszą mieć różnych nadawców, więc powstaje sytuacja opisana w treści zadania.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2011

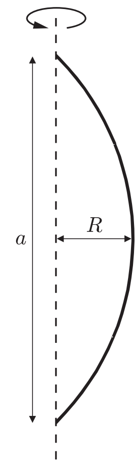
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 514 ($WT = 1{,}15$) i 515 ($WT = 3{,}35$) z numeru 3/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	42,61
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,01
Marian Łupieżowiec	Gliwice	37,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,78
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	33,19
Michał Koźlik	Gliwice	22,98

Zadania z fizyki nr 522, 523

Redaguje Jerzy B. BROJAN

522. Linka o długości $l = 1{,}5$ m i masie $m = 0{,}2$ kg (jednorodnie rozłożonej) jest zamocowana końcami w dwóch punktach odległych o $a = 1$ m (rys. 1). Linka obraca się wokół osi przechodzącej przez punkty zamocowania z prędkością kątową $\omega = 100$ rad/s i względem tego obracającego się układu odniesienia pozostaje nieruchoma. Pomijając efekty siły ciężkości, obliczyć numerycznie odległość R środkowego punktu linki od osi obrotu.



Rys. 1

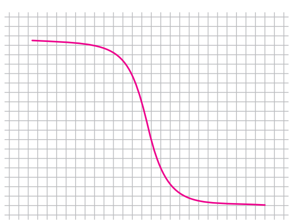
523. Dwie cienkie współosiowe soczewki o ogniskowych f_1 i f_2 są odległe o d i wykonane z tego samego szkła. Jaki warunek muszą spełniać podane parametry, aby ogniskowa zespołu nie zależała od długości fali (aby układ był achromatyczny)? Zmiany współczynnika załamania są niewielkie.

Ogólnie definiuje się ogniskową w sposób następujący: gdy na układ pada promień równoległy do osi i odległy od niej o niewielki odcinek h, a wychodząc z układu przecina oś pod kątem α, to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2011

Przypominamy treść zadań:

518. Źródło dźwięku o stałej częstotliwości poruszało się ruchem jednostajnym po linii prostej przebiegającej w pewnej odległości od nieruchomego mikrofonu. Wykonano staranny pomiar zależności częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon od czasu odebrania sygnału i zapisano wykres $f(t)$ na papierze milimetrowym. Niestety, zapomniano oznaczyć osie, wskutek czego arkusz papieru mógł zostać obrócony. Czy wykres jest symetryczny względem obrotu o 180°? Jeśli nie, to czy można rozstrzygnąć, czy jest on prawidłowy w danej postaci, czy też należy go obrócić? Załączony rysunek 2 jest tylko ilustracją problemu, a nie informacją o dokładnym przebiegu wykresu.

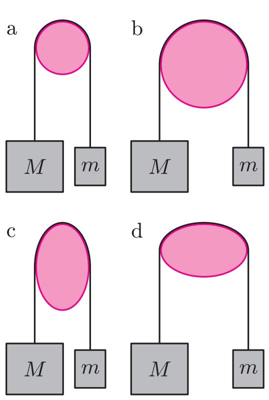


Rys. 2

519. Na lince zawieszono ciężar o masie M, a linkę przełożono przez nieruchomy walec o promieniu R. Na drugim końcu linki zawieszono najmniejszy ciężar m wystarczający do tego, aby większy ciężar nie ześlizgnął się w dół (rys. 3a). Jeśli ten sam ciężar M zawiesić na:

1) walcu o większym promieniu (rys. 3b),
2) podporze, której przekrój jest elipsą wydłużoną wzdłuż osi pionowej (rys. 3c) lub poziomej (rys. 3d),

to czy niezbędny ciężar m będzie mniejszy niż na rysunku a, większy, czy taki sam? Współczynnik tarcia linki o podporę jest w każdym przypadku jednakowy.



Rys. 3

518. Niech v będzie prędkością źródła, f_0 – jego częstotliwością, c – prędkością dźwięku, t – czasem odebrania dźwięku, t' – czasem jego wysłania ($t' = 0$ odpowiada chwili, gdy źródło jest najbliżej mikrofonu), h – minimalną odległością od mikrofonu. Czasy t i t' są powiązane wzorem

$$t = t' + \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + (vt')^2}. \tag{1}$$

Częstotliwość odebrana przez mikrofon jest zmieniona wskutek zjawiska Dopplera, tzn.

$$f(t) = \frac{f_0 c}{c + v'}, \tag{2}$$

gdzie v' jest rzutem prędkości źródła na kierunek do mikrofonu (dodatnim, gdy zwrot jest przeciwny), czyli

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1 + (h/vt')^2}} \cdot \mathrm{sgn}(t') = \frac{v^2 t'}{c(t - t')}. \tag{3}$$

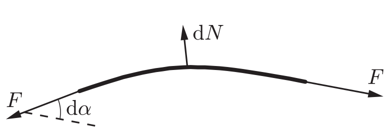
Rozwiązując równanie (1) ze względu na t' i podstawiając do (3) i (2), można (po dość pracochłonnych przekształceniach) sprawdzić, że

$$f(t) + f(-t) = \frac{2 f_0 c^2}{c^2 - v^2}. \tag{4}$$

Oznacza to, że wykres jest symetryczny względem punktu o współrzędnych $t = 0$, $f = \frac{f_0 c^2}{c^2 - v^2}$ – nieodróżnialny od wykresu obróconego.

519. Rozważmy niewielki fragment linki napięty siłą F i wygięty o kąt $\mathrm{d}\alpha$ (rys. 4). Wypadkowa dwóch sił F jest równoważona przez siłę reakcji podpory $\mathrm{d}N$, zatem maksymalna siła tarcia (będąca przyrostem siły napięcia) jest równa

$$\mathrm{d}F = f\mathrm{d}N = fF\mathrm{d}\alpha,$$



Rys. 4

gdzie f jest współczynnikiem tarcia. Sumując (całkując) przyrosty $\mathrm{d}F$, stwierdzamy, że przy ustalonym f i ustalonej sile napięcia na jednym końcu linki wartość F na drugim końcu zależy tylko od kąta między stycznymi do końców linki, czyli dla wszystkich przypadków a–d jest ona jednakowa.