Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2. Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba całkowita n taka, że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

619. W obrębie szachownicy jest $(n-1)^2$ punktów kratowych (w każdym spotykają się cztery pola szachownicy). Wyróżnijmy te punkty kratowe, na które padły środki płytek. Punkty kratowe leżą w $n-1$ rzędach po $n-1$ punktów; liczba punktów wyróżnionych przekracza $(n-1)(2n/3)$, więc w pewnym rzędzie jest ich więcej niż $\lfloor 2n/3 \rfloor$.

Numerujemy punkty kratowe w tym rzędzie od 1 do $n-1$. Wystarczy wykazać, że pewna trójka $(j, j+1, j+2)$ składa się z punktów wyróżnionych; można wtedy bezkarnie usunąć płytkę o środku w punkcie $j+1$.

Załóżmy, że tak nie jest; zatem w każdej z trójek $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ itd. jest punkt niewyróżniony. Jest $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ trójek postaci $(3i-2, 3i-1, 3i)$. W takim razie liczba punktów wyróżnionych (w rozważanym rzędzie) nie przekracza różnicy $(n-1) - \lfloor (n-1)/3 \rfloor$; zaś ta różnica równa się $\lfloor 2n/3 \rfloor$, o czym można się przekonać, rozpatrując trzy możliwe reszty z dzielenia n przez 3. Sprzeczność – wyróżnionych punktów miało być w tym rzędzie więcej.

620. Niech $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ $(m \geqslant 1)$.

Gdy $a_0 = 0$, wystarczy wziąć dowolną liczbę n, będącą iloczynem k różnych liczb pierwszych. Są one oczywiście dzielnikami liczby $P(n)$. Dalej przyjmijmy, że $a_0 \neq 0$.

Najpierw wykażemy, że zbiór dzielników pierwszych *wszystkich* liczb $P(n)$ jest nieskończony. Przypuśćmy bowiem, że jest to zbiór skończony $\{p_1, \ldots, p_s\}$. Biorąc jako n dowolną liczbę postaci $n = a_0 l p_1 \ldots p_s$ (l całkowite), mamy

$$P(n) = a_0 \Big[1 + \sum_{i=1}^{m} a_i a_0^{i-1} (l p_1 \ldots p_s)^i \Big].$$

Liczba w nawiasie kwadratowym nie dzieli się przez żadną z liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_s$ (a swoboda wyboru l pozwala przyjąć, że jest różna od ± 1); ma więc jakiś inny dzielnik pierwszy, wbrew uczynionemu przypuszczeniu.

Stąd wniosek, że dla dowolnego k istnieją różne liczby pierwsze $q_1, \ldots, q_k$ oraz takie liczby całkowite $n_1, \ldots, n_k$, że

$$P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k.$$

Znajdujemy liczbę n, spełniającą układ kongruencji

$$n \equiv n_i \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

taka liczba istnieje, w myśl chińskiego twierdzenia o resztach. Wówczas

$$P(n) \equiv P(n_i) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, k;$$

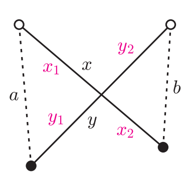
liczba $P(n)$ ma więc co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 611 ($WT = 2{,}65$) i 612 ($WT = 2{,}33$) z numeru 12/2010

Michał Kieza	Warszawa	47,30
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Zbigniew Skalik	Wrocław	34,60
Paweł Najman	Kraków	33,57
Piotr Sobczak	Łódź	33,20
Tomasz Tkocz	Rybnik	32,95

Michał Kieza – już po raz czwarty.

Rozwiązanie zadania M 1322.
Zbiór n odcinków o różnokolorowych końcach możemy skonstruować na skończenie wiele sposobów (dokładnie $n!$). Narysujmy go tak, aby suma długości narysowanych odcinków była możliwie najmniejsza. Wtedy te odcinki są parami rozłączne, bo w przeciwnym przypadku



parę x, y przecinających się odcinków można zastąpić parą odcinków nieprzecinających się a, b, zmniejszając jednocześnie sumę długości wszystkich odcinków. Wynika to łatwo z nierówności trójkąta: $|a| + |b| > (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) = |x| + |y|$.

Klub 44

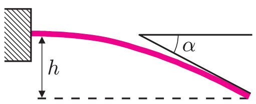
Rozwiązania zadań z numeru 4/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

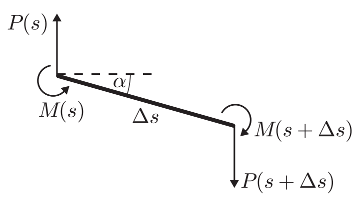
516. Sprężyście zginający się jednorodny pręt o długości l i masie m zamocowano jednym końcem poziomo, a drugi zwisa pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Miarą sztywności pręta jest dany parametr k, będący stosunkiem momentu siły zginającej M do kąta α między stycznymi do końców pręta, gdy M ma wzdłuż niego stałą wartość. Obliczyć numerycznie zwis pręta h oraz kąt opadania jego końca α, przy następujących danych: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $k = 1$ N $\cdot$ m/rad, przyspieszenie ziemskie $\mathrm{g} = 10$ m/s^2.

Wskazówka: Obliczenia mogą być oparte na przedstawieniu pręta jako zespołu dużej liczby n sztywnych prętów o masach $m_1 = m/n$ i długościach $l_1 = l/n$, połączonych przegubami opisanymi przez współczynnik $k_1 = k \cdot n$.



Rys. 1

517. Równoległa wiązka światła o natężeniu (tzn. mocy na jednostkę powierzchni prostopadłej) I_0 pada na kulkę o promieniu r ze szkła o współczynniku załamania n. W odległości $R \gg r$ od kulki znajduje się ekran prostopadły do wiązki padającej, ale oświetlony tylko przez światło przechodzące przez kulkę. Jeśli można pominąć efekty dyfrakcyjne i odbicie światła od szkła, to jakie jest natężenie światła padającego na środek ekranu?



Rys. 2

516. Niech s będzie zmienną wzdłuż pręta, od $s = 0$ (koniec zamocowany) do $s = l$ (koniec zwisający). Funkcjami zmiennej s są: siła oddziaływania jednej części na drugą $P(s)$ (czyli ciężar prawej części pręta), moment zginający pręt $M(s)$ oraz kąt odchylenia stycznej od poziomu $\alpha(s)$. Oczywiste jest, że $P(s) = mg(l - s)/l$, natomiast rozważając mały odcinek pręta o długości $l_1 = \Delta s$, stwierdzamy, że warunek równowagi ze względu na obrót ma postać (zob. rys. 2)

$$-\Delta M = M(s) - M(s + \Delta s) = P \Delta s \cos\alpha.$$

Pominęliśmy tu „wyrazy drugiego rzędu”, tzn. zaniedbaliśmy ciężar tego odcinka oraz różnicę między wartościami P na jego końcach. Dalej, różnica między kątami nachylenia sąsiednich odcinków zależy od M zgodnie ze wzorem

$$k_1 \Delta\alpha = M, \quad \text{czyli} \quad kl = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = M.$$

Zbierając zapisane równania, dochodzimy w granicy $\Delta s \to 0$ do równania różniczkowego

$$kl \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}s^2} = -mg \frac{l - s}{l} \cos\alpha,$$

które po wprowadzeniu zmiennej bezwymiarowej $z = s/l$ przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{mgl}{k}(1 - z)\cos\alpha.$$

Równanie to trzeba scałkować od $z = 0$ (gdzie $\alpha = 0$) do $z = 1$ (gdzie $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$), przy czym stała $\frac{mgl}{k}$ ma wartość 10. Zgodnie z treścią zadania obliczyć należy $\alpha(1)$ oraz sumę przesunięć pionowych $\mathrm{d}h = \mathrm{d}z \cdot \sin\alpha$. Autor stosował procedurę numeryczną, zaczynając od $z = 0$ i wybierając dowolną początkową wartość $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$, a następnie korygując ją tak, aby w punkcie $z = 1$ otrzymać $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z} = 0$. Okazuje się, że właściwą początkową wartością $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}$ jest 3,74, końcowy kąt nachylenia jest równy $\alpha(1) = 1{,}054$ rad, a zwis $h = 0{,}701$ m.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 512 ($WT = 3{,}30$) i 513 ($WT = 3{,}15$) z numeru 2/2011

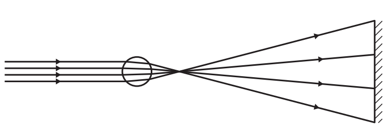
Jerzy Witkowski	Radlin	39,68
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,52
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,63
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	32,04
Michał Koźlik	Gliwice	20,94

Rozwiązanie zadania F 793.
Możemy założyć, że kropla rozpłynęła się symetrycznie i widziana z góry ma kształt koła o promieniu R. Powierzchnia tego koła wynosi $S = V/d = m/\rho d$. Siła przyciągania między płytkami równa jest $F = \Delta p/S$, gdzie $\Delta p = 2\sigma/d$ jest ciśnieniem wywieranym przez zakrzywioną powierzchnię cieczy. Ostatecznie

$$F = \frac{2\sigma m}{\rho d^2} = 0{,}72 \text{ N}.$$

517. Promień, którego przedłużenie jest odległe od środka kulki o h, pada na jej powierzchnię pod kątem $\alpha = \arcsin(h/r)$ i załamuje się pod kątem $\beta = \arcsin(h/rn)$. Ponieważ przy wyjściu z kulki kąty są te same, więc kąt odchylenia tego promienia od kierunku początkowego jest równy $\gamma = 2(\alpha - \beta)$. Rozpatrując promienie padające na ekran w pobliżu środka, należy przyjąć, że kąty są małe, tzn. $\gamma = 2\frac{h}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Gdy spełniony jest warunek $R \gg r$, promienie odchylone o γ padają na ekran w odległości γR od środka. Widzimy, że wiązka o polu przekroju πh^2, której moc wynosi $\pi h^2 I_0$, oświetla na ekranie koło o polu $\pi(\gamma R)^2$. Szukane natężenie oświetlenia środka ekranu wynosi więc

$$\frac{\pi h^2 I_0}{\pi(\gamma R)^2} = I_0 \left(\frac{r}{2R}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-2}.$$



Rys. 3