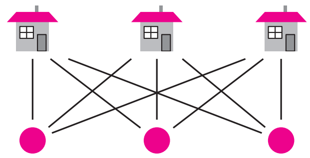
Domki i studnie

Joanna JASZUŃSKA

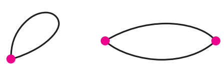
Zagadka. Bracia Jacek, Wacek i Placek mieszkają w trzech różnych domkach, w pobliżu których znajdują się trzy studnie: jedna z H_2O, druga z C_2H_5OH, trzecia z sokiem porzeczkowym. Każdy z braci chciałby poprowadzić ze swojego domu trzy chodniki, po jednym do każdej ze studni. Czy bracia mogą poprowadzić swoich 9 chodników tak, aby żadne dwa z nich się nie przecinały (rys. 1)?



Rys. 1. Czy da się poprowadzić chodniki tak, by żadne dwa się nie przecinały?

Zapewne wielu Czytelników jeszcze w dzieciństwie przekonało się, metodą prób i błędów, że odpowiedź brzmi „nie”. Aby ją udowodnić, wprowadźmy kilka pojęć z teorii grafów.

Grafy dwudzielne. *Graf* to, mówiąc intuicyjnie, punkty (zwane *wierzchołkami*) połączone liniami (niekoniecznie prostymi, zwanymi *krawędziami*). Rozważać będziemy tylko grafy *spójne*, czyli „w jednym kawałku”, i *proste*, czyli takie, w których każda krawędź ma dwa różne końce i żadnych dwóch wierzchołków nie łączy bezpośrednio więcej niż jedna krawędź (rys. 2).

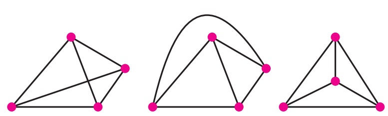


Rys. 2. Sytuacje niedozwolone w grafach prostych.

K_n oznacza graf *pełny* o n wierzchołkach, czyli graf o n wierzchołkach, z których każde dwa są połączone krawędzią (rys. 3 i 4).

Graf *pełny dwudzielny* K_n^m to taki graf, którego $n + m$ wierzchołków można podzielić na dwie grupy, po n i m, a krawędzie łączą wszystkie wierzchołki z jednej grupy ze wszystkimi z drugiej, przy czym innych krawędzi nie ma. W przypadku trzech domków i trzech studni występuje graf K_3^3.

Grafy planarne. Graf nazywamy *planarnym*, jeśli da się go narysować na płaszczyźnie tak, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały. Na przykład graf K_4 jest planarny (rys. 3). Nie wszystkie grafy są planarne.



Rys. 3. Różne sposoby narysowania grafu K_4.

W zagadce o domkach i studniach należy rozstrzygnąć, czy graf K_3^3 jest planarny.

Wzór Eulera i przydatna nierówność. Dla grafów planarnych zachodzi wzór Eulera: $w - k + s = 2$, gdzie w to liczba wierzchołków grafu, k – liczba krawędzi, a s – liczba ścian, czyli obszarów, na jakie graf dzieli płaszczyznę (wliczamy też „zewnętrze” grafu).

Wzór Eulera zachodzi także dla odpowiednio „przyzwoitych” wielościanów, np. dla wielościanów wypukłych.

Wykażemy teraz, że w planarnym grafie dwudzielnym zachodzi nierówność $(*)\ 2k \geqslant 4s$. Policzmy krawędzie takiego grafu. Każda ściana ma na przemian wierzchołki z każdej z dwóch grup, zatem jest parzystokątna, więc co najmniej czworokątna. Ma wobec tego co najmniej 4 krawędzie. W grafie jest więc co najmniej $4s$ krawędzi, ale – uwaga! – policzonych dwukrotnie (każdą krawędź liczymy przy każdej z dwóch ścian, które rozdziela). Stąd $2k \geqslant 4s$.

Rozwiązanie zagadki. Pokażemy, że graf K_3^3 nie jest planarny, czyli że bracia nie są w stanie poprowadzić nieprzecinających się chodników. Przypuśćmy przeciwnie. Wtedy ze wzoru Eulera mamy $w - k + s = 2$, przy czym $w = 6$, $k = 9$. Stąd $s = 5$. Jednocześnie na mocy $(*)$ zachodzi $2k \geqslant 4s$, czyli $18 \geqslant 20$, sprzeczność. □

Zadania domowe

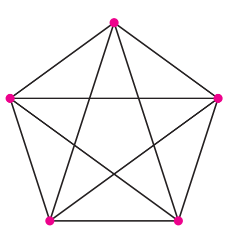
1. Udowodnij wzór Eulera.

2. Wykaż, że wierzchołki i krawędzie dowolnego wielościanu wypukłego tworzą graf planarny prosty.

3. Wykaż, że dla każdego wielościanu wypukłego zachodzi $2k \geqslant 3s$ oraz $2k \geqslant 3w$.

4. Wykaż, że graf K_5 nie jest planarny (rys. 5).

5. Czy istnieje takie $n > 5$, że graf K_n jest planarny?



Rys. 4. Graf K_5.

Ważna uwaga na koniec. Z rozwiązania zagadki o domkach i studniach oraz z zadania 4 można wywnioskować, że jeśli graf zawiera „fragment typu” K_3^3 lub K_5, to nie może być planarny (ponieważ już ten fragment nie daje się narysować bez przecinających się krawędzi, a co dopiero cały graf).

Słowa „fragment typu” bywają na różne sposoby doprecyzowywane, ale pozostańmy przy wersji mniej formalnej.

Twierdzenie Kuratowskiego głosi, że zachodzi także fakt odwrotny, czyli że *graf jest nieplanarny* ***wtedy i tylko wtedy****, gdy zawiera „fragment typu”* K_5 *lub* K_3^3. Twierdzenie to oznacza, że te dwa niezwykle proste grafy nieplanarne (K_3^3 i K_5) wystarczają, by rozstrzygać o planarności lub nieplanarności wszystkich innych grafów, a także że – w pewnym sensie – nie ma żadnego „naprawdę zupełnie innego” od nich grafu nieplanarnego.