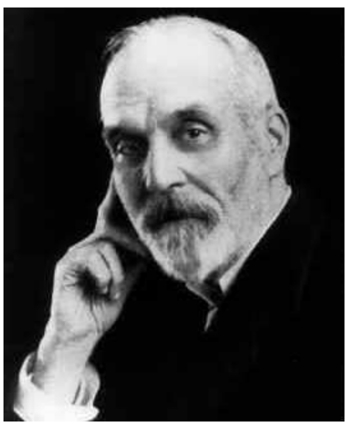
Alfametyki, czyli arytmetyka słów

Andrzej BARTZ

Większość materiału zawartego w tym artykule wykorzystałem wcześniej w moim opracowaniu „Alfametyki, czyli kryptarytmy z sensem”, który powstał dzięki inspiracji redaktora naczelnego *Rozrywki*, Romana Nowoszewskiego, i ukazał się w latach 2006/2007 w czasopiśmie *Rozrywka dla każdego* (2006 nr 1 i 2, 2007 nr 6). Artykuł niniejszy jest jego zmienioną i uaktualnioną wersją.

Założycielem miesięcznika beletrystycznego *Strand Magazine*, który ukazywał się w Wielkiej Brytanii w latach od 1890 do 1950, był George Newnes. To właśnie w *Strand Magazine* drukowane były po raz pierwszy liczne powieści i opowiadania wielu znanych autorów, do grona których należeli, między innymi, Arthur Conan Doyle, Agatha Christie, Rudyard Kipling, Georges Simenon, Graham Greene, Lewis Carroll i Edgar Wallace. Najpopularniejszymi postaciami ze stron *Strand Magazine* zostali niewątpliwie detektyw Sherlock Holmes i jego przyjaciel Dr Watson.

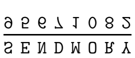


Henry Ernest Dudeney

W znakomitym towarzystwie wielkich pisarzy publikował swoje zadania z zakresu matematyki rekreacyjnej Henry Ernest Dudeney (1857–1930). Jego rubryka w *Strand Magazine* zatytułowana „Perplexities” ukazywała się co miesiąc od maja 1910 do czerwca 1930 i tym bardziej fascynowała czytelników, im większe sukcesy dzięki logicznemu rozumowaniu odnosił Sherlock Holmes.

Do znanych i wznawianych do dziś książek Dudeneya należą *The Canterbury Puzzles* (1907), *Amusements in Mathematics* (1917), *Modern Puzzles* (1926) oraz *Puzzles and Curious Problems* (1932). Kompletną bibliografię twórczości Dudeneya drukowanej w *Strand Magazine* opracował i niegdyś na pewien czas udostępnił w Internecie do celów badawczych Donald Knuth.

W lipcowym numerze *Strand Magazine* z 1924 roku (Vol. 68, 1924, s. 97) Dudeney opublikował Problem 708 (zadania w rubryce „Perplexities” przez cały czas jej istnienia były kolejno numerowane). Problem ten zatytułowany był „Verbal Arithmetic” (arytmetyka werbalna, arytmetyka słów) i zawierał cztery kryptarytmy. Były to kryptarytmy, w których litery, reprezentujące poszczególne cyfry, tworzyły powiązane semantycznie słowa lub sensowne frazy.



Wśród nich znalazł się:

$$\begin{array}{r} \texttt{SEND} \\ +\ \texttt{MORE} \\ \hline \texttt{MONEY} \end{array}$$

najpopularniejszy i najczęściej cytowany kryptarytm na świecie.

Dudeney i jego amerykański kolega po fachu, Sam Loyd, korespondowali przez pewien czas i wymieniali zadania, lecz Dudeney urwał wymianę listów i oskarżył Loyda o drukowanie jego, Dudeneya, zadań pod swoim nazwiskiem. Ciekawe, że tu i ówdzie za oceanem spotkać można twierdzenia, że to Loyd jest autorem jeszcze starszych zadań z dziedziny „arytmetyki werbalnej”. Są to jednak twierdzenia bezpodstawne.

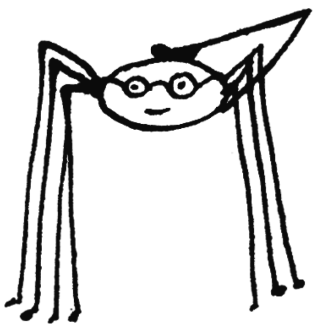
* * *

Wydawany w Belgii w latach od 1931 do 1939 francuskojęzyczny miesięcznik *Sphinx* (podtytuł: „Revue Mensuelle des Questions Récréatives”) poświęcony był całkowicie matematyce rekreacyjnej. Redaktorem naczelnym był wybitny matematyk, profesor brukselskiego uniwersytetu, Maurice Kraitchik.

W numerze tego czasopisma z maja 1931 roku M. Vatriquant, publikujący pod pseudonimem „Minos”, wprowadził po raz pierwszy termin *Cryptarithmie* (stąd terminy kryptarytmetyka i kryptarytm), poprzedzając swoje niepozornie wyglądające zadanie

```
   ABC
 × DE
  ----
   FEC
  DEC
  ----
  HGBC
```

7	1	2	5	8	3	4	6
E	A	B	C	F	D	H	G



takim wstępem: *Kryptografowie, szyfrując teksty, zastępują litery cyframi. My postąpiliśmy na odwrót, cyfry w działaniu zastąpiliśmy literami, a zadaniem czytelników jest rozszyfrować działanie, tzn. ustalić, jakie cyfry ukrywają się pod poszczególnymi literami.*

W dziale pod tytułem „Cryptarithmie” *Sphinx* zamieścił w okresie swego istnienia wiele problemów z dziedziny odtwarzania działań arytmetycznych. Autorem bardzo wielu z nich był mistrz tego gatunku i redaktor działu kryptarytmów, M. Pigeolet.

Definicję Vatriquanta prezentuje się zazwyczaj w nieco uściślonej postaci: litery należy zastąpić cyframi tak, aby powstałe w ten sposób liczby tworzyły prawidłowe działanie. Tej samej literze powinna odpowiadać ta sama cyfra, a różnym literom – różne cyfry. Żadna z liczb wielocyfrowych nie może zaczynać się zerem. Zadanie powinno mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

Fr i Fi
$(625)^2 = 390625$

Mn
$(2396)^2 = 5740816$

Ge
$(2484)^2 = 6170256$

Op
$(6509)^2 = 42367081$

As
$(2394)^2 = 5731236$

Ga
$(7621)^2 = 58079641$

Po
$(3792)^2 = 14379264$

Rolę liter mogą spełniać inne symbole. *Sphinx* drukował, na przykład, kryptarytmy, w których cyfry reprezentowane były przez figury szachowe. M. Vatriquant został ojcem chrzestnym kryptarytmów, ale ich nie wynalazł. Znane one były ponoć już w starożytnych Chinach jako „arytmetyka liter” lub „arytmetyka słów”.

* * *

Kryptarytm, w którym cyfry zaszyfrowane są literami tworzącymi wyrazy powiązane pewną relacją znaczeniową albo słowa, składające się w sensowne frazy lub zdania, nazywa się alfametykiem (ang. *alphametic*). Termin ten wprowadził w 1955 roku J.A.H. Hunter (*The Globe and Mail*, Toronto, 27.10.1955, s. 27), kontynuując ideę arytmetyki werbalnej. Za najstarszy alfametyk uważany jest `SEND` + `MORE` = `MONEY`, H.E. Dudeneya zaś uważa się za ojca tego gatunku.

Termin ten w USA i Kanadzie konsekwentnie używany jest od swych narodzin przez wybitnych popularyzatorów matematyki rekreacyjnej i obejmuje swym znaczeniem najciekawszy, najbardziej spektakularny i najbardziej interesujący szaradziarsko rodzaj kryptarytmów. W Polsce przyjmuje się dopiero od kilku lat. Wydaje mi się, że należy go stosować zawsze wtedy, gdy określa rodzaj zadania w sposób bardziej precyzyjny niż termin „kryptarytm”.

Alan Wayne opublikował w roku 1947 w *The American Mathematical Monthly* (Vol. 54, s. 38) następujący alfametyk:

```
  FORTY
    TEN
 +  TEN
  -----
  SIXTY
```

2	9	7	8	6	5	0	3	1	4
F	O	R	T	Y	E	N	S	I	X

Drukując najbardziej eleganckie rozwiązanie tego zadania (Vol. 54, s. 413), redakcja wprowadziła termin: kryptarytm urzekający (*charming*).

Na ten przymiotnik zasługują kryptarytmy, które

(1) mają sens zarówno literowo, jak i cyfrowo,
(2) w rozwiązaniu zawierają wszystkie cyfry,
(3) mają dokładnie jedno rozwiązanie,
(4) dają się rozwiązać logicznym rozumowaniem, bez rozpatrywania niezliczonej liczby przypadków.

Termin ten jednak szerzej się nie przyjął.

Jeśli wszystkie słowa w alfametyku są liczebnikami lub jego litery w inny sposób przedstawiają liczby (np. w rzymskim zapisie liczb), to określa się go jako podwójnie prawdziwy (*doubly true*).

Jeśli alfametyk jest podwójnie prawdziwy, występują w nim wszystkie cyfry i ma dokładnie jedno rozwiązanie, to nazywa się go idealnym podwójnie prawdziwym (*ideal doubly true*). Oba powyższe określenia używane są w *Journal of Recreational Mathematics* od początku lat siedemdziesiątych XX wieku.

Alan Wayne pierwsze swoje podwójnie prawdziwe alfametyki publikował już od 1945 r. w czasopiśmie *The Cryptogram*, wydawanym przez American Cryptogram Association, dla przykładu:

#1 SEVEN + SEVEN + SIX = TWENTY

#2 SEVEN + THREE + TWO = TWELVE

#3 TWENTY + FIFTY + NINE + ONE = EIGHTY

FORTY + TEN + TEN = SIXTY był jednak pierwszym idealnym alfametykiem podwójnie prawdziwym i mającym naprawdę proste i eleganckie rozwiązanie. Fakt ten oraz duży zasięg *The American Mathematical Monthly* spowodowały znaczny wzrost popularności alfametyków na świecie. Dla mnie pozostanie na zawsze pierwszym alfametykiem, z jakim się w życiu zetknąłem – już jako dorosły matematyk i dydaktyk. Znalazłem go po raz pierwszy w 1971 r. w rosyjskim zbiorze zadań z międzynarodowych olimpiad matematycznych. Moja fascynacja była ogromna, lecz musiało upłynąć jeszcze kilka lat, zanim sam zacząłem układać tego typu zadania. Pozwoliły mi one połączyć trzy z moich pasji: matematykę, informatykę i szaradziarstwo.

Alan Wayne jest chyba słusznie uważany za autora pierwszego alfametyku podwójnie prawdziwego. Jednak kto wpadł na pomysł? Oczywiście Henry Ernest Dudeney! Już w jego werbalnej arytmetyce w 1924 roku znalazły się obok SEND + MORE = MONEY alfametyki:

#4 EIGHT − FIVE = FOUR

#5 TWO × TWO = THREE

#6 SEVEN : TWO = TWO

```
BOB
 JOE
 OVV
 VESN
 VESN
```

Podwójnie prawdziwe to one jeszcze nie były, bo dwa razy dwa rzadko równa się trzy, ale cel dla autorów został wytyczony…

Pierwszym idealnym podwójnie prawdziwym układem alfametyków był

#7 FOUR + FIVE = NINE   FOUR + SIX = FIVE + FIVE

(A. Bartz, *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 16(2), 1983–84, s. 131)

* * *

W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX wieku alfametyki pojawiały się w USA i Kanadzie bardzo często w takich pismach, jak *Mathematics Magazine* czy *Recreational Mathematics Magazine*, a wraz z narodzinami *Journal of Recreational Mathematics* w 1968 r. znalazły stałe miejsce w dziale „Alphametics and Solutions”.

#1
S E V N I X T W Y
6 8 7 2 5 0 1 3 4

#2 N ↔ O
S E V N T H R W O L
8 2 5 4 1 9 7 0 6 3

#3
T W E N Y F I O G H
3 6 4 8 2 7 5 9 0 1

#4 ma niestety 20 rozwiązań

E	I	G	H	T	F	V	O	U	R
1	2	3	4	8	6	5	0	9	7
1	2	3	4	8	6	9	0	5	7
1	2	3	7	5	6	8	0	9	4
1	2	3	7	5	6	9	0	8	4
1	2	7	8	0	6	3	5	4	9
1	2	7	8	0	6	4	5	3	9
1	4	8	2	0	7	5	3	6	9
1	4	8	2	0	7	6	3	5	9
1	5	2	3	0	7	4	6	8	9
1	5	2	3	0	7	8	6	4	9
1	6	7	2	5	8	3	0	9	4
1	6	7	2	5	8	9	0	3	4
1	6	7	4	3	8	5	0	9	2
1	6	7	4	3	8	9	0	5	2
1	6	9	0	5	8	3	2	7	4
1	6	9	0	5	8	7	2	3	4
1	7	0	3	6	8	4	2	9	5
1	7	0	3	6	8	9	2	4	5
1	7	0	5	4	8	6	2	9	3
1	7	0	5	4	8	9	2	6	3

#5 ma jedno rozwiązanie:
T W O H R E
1 3 8 9 0 4

#6 ma trzy rozwiązania
T W O S E V N
2 3 7 5 6 1 9
1 9 2 3 6 8 4
1 5 7 2 4 6 9

przy czym cały schemat dzielenia spełnia
T W O S E V N B J
2 3 7 5 6 1 9 4 8

#7
F O U R I V E N S X
1 9 5 0 2 8 7 3 6 4

Pierwszym redaktorem tego działu był do 1976 r. J.A.H. Hunter. Po nim przejął tę funkcję i pełni do dziś Steven Kahan, wykładowca matematyki w Queens College of the City University of New York oraz autor trzech książek traktujących o alfametykach.

Donald E. Knuth

Od czasu do czasu publikuje w *Journal of Recreational Mathematics* również Donald Knuth, matematyk i informatyk, laureat Nagrody Turinga (1974), czyli informatycznego Nobla, jeden z najwybitniejszych teoretyków i praktyków informatyki, emerytowany profesor Stanford University, twórca systemu formatowania dokumentów TEX i systemu projektowania czcionek METAFONT. Nade wszystko Knuth jest autorem wielotomowego dzieła *The Art of Computer Programming*, które jest monumentalnym kompendium z dziedziny algorytmów i struktur danych. Informatykowi, który nie wie, kim jest Donald Knuth, nietrudno wykazać, że nie jest informatykiem.

Knuth pasjonuje się również matematyką rekreacyjną, bardzo wiele jej problemów i zadań wykorzystując w swej pracy naukowej i dydaktycznej. Każda łamigłówka, gra czy zadanie logiczne jest dla niego wyzwaniem do poszukiwania algorytmów, czyli ogólnych metod postępowania, prowadzących niezawodnie do celu. *Journal of Recreational Mathematics* wydrukował kilka jego alfametyków:

KNIFE + FORK + SPOON + SOUP = SUPPER	JRM 33(1) Problem 2621,
SEVEN + TEN + ONE = THREE + NINE + SIX	JRM 33(3) Problem 2651,
HOT × HOT = ONION	JRM 34(2) Problem 2683.

Problem 2651 ukazał się w sąsiedztwie dwóch alfametyków mojego autorstwa:

2651. *Two Ways To Eighteen* by Donald Knuth, Stanford, California
SEVEN + TEN + ONE = THREE + NINE + SIX

2652. *3-4-5 Triangle–Swahili* by Andrzej Bartz, Erlangen, Germany
$(\mathtt{INE})^2 + (\mathtt{TATU})^2 = (\mathtt{TANO})^2$

2653. *3-4-5 Triangle–Esperanto* by Andrzej Bartz, Erlangen, Germany
$(\mathtt{TRI})^2 + (\mathtt{KVAR})^2 = (\mathtt{KVIN})^2$

2621
K N I F E O R S P U
8 4 7 2 6 9 3 1 5 0

2651
S E V N T O H R I X
4 5 0 8 3 9 7 2 6 1

2652
I N E T A U O
6 9 0 5 1 2 8

2653
T R I K V A N
5 0 4 7 9 3 6

2683
H O T N I
2 6 3 9 1

Czwarty tom *The Art of Computer Programming* zawiera obszerny rozdział poświęcony generowaniu permutacji (D.E. Knuth, *Sztuka programowania*, Tom 4, zeszyt 2, *Generowanie wszystkich krotek i permutacji*, WNT, 2007). Sporo miejsca zajmują w nim (jako przykład zastosowań) alfametyki i interesujące informacje na ich temat, np. szkic algorytmu rozwiązywania alfametyków addytywnych, czyli dających się przedstawić jako relacje liniowych wielomianów słów.

Trójkąt, czyli koło do kwadratu

Alfametycznych kwadratów poszukuję od ponad trzydziestu lat. Tylko dwa z nich dotąd opublikowałem (p. poniżej). Oba przykłady kwadratów słów trzyliterowych są ilustracją tzw. liczb automorficznych.

Liczba automorficzna to taka, której kwadrat kończy się nią samą. Kwadraty słów czteroliterowych są ogromną rzadkością, toteż wszystkie zasługują na uwagę. Nie są mi znane inne polskojęzyczne prócz poniższych sześciu przeze mnie skonstruowanych.

Andrzej BARTZ

Frazeologiczny
$(\mathtt{COŚ})^2 = \mathtt{NIECOŚ}$
Rozrywka, 1984, 19(678)

Filozoficzny
$(\mathtt{BYT})^2 = \mathtt{NIEBYT}$

Mnogościowy
$(\mathtt{DUŻO})^2 = \mathtt{MNÓSTWO}$
Szaradzista, 1984, 23/24(693/694)

Geometryczny
$(\mathtt{KOŁO})^2 = \mathtt{TRÓJKĄT}$

Optyczny
$(\mathtt{MROK})^2 = \mathtt{CIEMNOŚĆ}$

Astronomiczny
$(\mathtt{URAN})^2 = \mathtt{MERKURY}$

Gastronomiczny
$(\mathtt{STEK})^2 = \mathtt{RUMSZTYK}$

Podwórzowy
$(\mathtt{DWÓR})^2 = \mathtt{PODWÓRKO}$