

Funkcja (10) ma kilka ciekawych własności. Okazuje się, że jej część rzeczywista i urojona, a także kwadrat jej modułu, czyli gęstość prawdopodobieństwa, są funkcjami fraktalnymi. Dla dowolnego ustalonego czasu t wykres przestrzennej zależności funkcji $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_x = s$. Dla prawie każdego ustalonego $x \in [0, \pi]$ wykres funkcji $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_t(x) = 1 + s/2$, ale dla gęstego, dyskretnego zbioru punktów x_d , funkcja $\rho(x = x_d, t)$ jest gładka, a więc $D_t(x_p) = 1$. Wykres funkcji dwóch zmiennych $\rho(x, t)$ jest fraktalem o wymiarze $D_{xy} = 2 + s/2$.

Dwuwymiarowe wykresy gęstości prawdopodobieństwa $P(x, t)$ nazywamy fraktalnymi dywanami kwantowymi, w analogii do pojęcia dywanów kwantowych używanego w przeszłości. Na rysunku 2(a) pokazujemy typowy fraktalny dywan kwantowy (jaśniejsze obszary oznaczają większą gęstość prawdopodobieństwa) dla $q = 2$, $s = 3/2$ i jego cięcia w czasie i przestrzeni. Okresowość w czasie z okresem $2\pi/3$, którą widzimy na dywanie, wiąże się ze strukturą widma częstości $\omega_{m,k} = 3(4^{m-1} + \dots + 4^{m-k})$, $m = 1, \dots, \infty$, $k = 1, \dots, m$, fraktalnej gęstości prawdopodobieństwa $\rho(x, t)$. W punktach $x_d = k\pi/q^m$ ($k = 0, 1, \dots, q^m$) suma (10) ma tylko m składników, w związku z czym funkcja $P_x(t)$ jest gładka ($D_t = 1$). Przykład takiego zachowania pokazany jest na rysunku 2(f). Tak więc funkcja $D_t(x)$ nie jest ciągła w żadnym punkcie x na przedziale $[0, \pi]$.

Oczywiście, żaden układ nie może mieć nieskończonej energii, co, między innymi, oznacza, że nie ma w przyrodzie „prawdziwych” fraktali, tak samo, jak nie ma idealnych okręgów, prostych itd. W praktyce mówimy o fraktalach „fizycznych”, mając na myśli obiekty, które w pewnym zakresie skali wykazują (statystyczne) samopodobieństwo. Ciekawe, że te fizyczne fraktale kwantowe, zdefiniowane jako skończone sumy składników w równaniu (10), zachowują swój charakter w czasie. Podobne rozwiązania można skonstruować dla całej klasy potencjałów wiążących cząstkę wystarczająco mocno (np. dla oscylatora harmonicznego).



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1318. Znaleźć wszystkie takie liczby pierwsze k , że liczba $2^k + k^2$ jest pierwsza. Rozwiązanie na str. 24

M 1319. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B i boku BC długości 1. Punkty L , M i N to odpowiednio środki boków BC , CA i AB (rys. 1). Wiedząc, że proste BM i CN są prostopadłe, obliczyć długość odcinka AL .

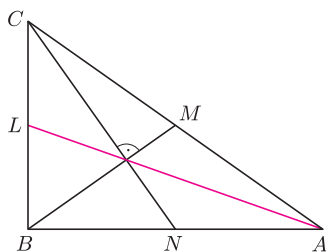
Rozwiązanie na str. 3

M 1320. Trójkąt równoboczny o boku długości 2011 podzielono na jednostkowe trójkąty równoboczne, analogicznie do rysunku 2. Ile jest ścieżek prowadzących od trójkąta w górnym rzędzie do środkowego trójkąta w dolnym rzędzie, takich że kolejne trójkąty na ścieżce mają wspólny bok, a ścieżka nigdy nie wraca do góry (z rzędu niższego do wyższego) ani nie przechodzi dwa razy przez żaden trójkąt? Rozwiązanie na str. 2

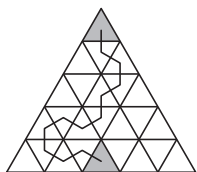
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 791. Kuchenka elektryczna przystosowana do napięcia 220 V jest wyposażona w dwie spirale grzejne o oporach 60 i 120 Ω . Zaprojektować schemat połączeń pozwalających użytkować kuchenkę w trzech zakresach mocy: 400, 800 i 1200 W. Rozwiązanie na str. 23

F 792. Galwanometr o czułości $3 \cdot 10^{-4}$ A i zakresie $1,5 \cdot 10^{-2}$ A, wyposażony w opornik wewnętrzny 60 Ω , należy przekształcić w miernik uniwersalny (amperomierz o zakresach 100 mA i 5 A oraz woltomierz 10 V, 100 V i 1000 V). Zaproponować schemat połączeń i obliczyć parametry niezbędnych oporników. Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1



Rys. 2