Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W dniu 19 marca 2011 roku w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie przy ulicy Grzegorzewskiej 10 odbył się finał VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W czasie trzech godzin uczestnicy zawodów zmagali się z pięcioma zadaniami finałowymi, z których jedno (naszym zdaniem najtrudniejsze) omawiamy poniżej.

Zadanie 5. *Wewnątrz koła o promieniu* 1 *znajdują się punkty* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100}$. *Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt* P*, dla którego*

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100.$$

Większość poprawnych rozwiązań tego zadania była podobna do rozwiązania zaproponowanego przez Komitet Główny OMG.

Rozwiązanie firmowe. Niech P i Q będą końcami dowolnej średnicy rozważanego koła. Wtedy dla dowolnego punktu X płaszczyzny mamy $PX + XQ \geqslant PQ = 2$. Nierówność ta jest tzw. nierównością trójkąta dla trójki punktów P, Q i X. Więc dla $i = 1, 2, \ldots, 100$ otrzymujemy $PA_i + QA_i \geqslant 2$. Dodając te nierówności stronami, wnioskujemy, że

$$(PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100}) + (QA_1 + QA_2 + \ldots + QA_{100}) \geqslant 200.$$

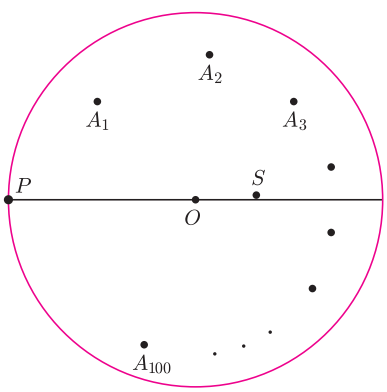
Z otrzymanej nierówności wynika, że co najmniej jeden z punktów P lub Q spełnia warunki zadania.

Uczestnicy zawodów znaleźli kilka innych rozwiązań tego zadania. Chcielibyśmy przedstawić jedno z nich. Rozwiązanie to opiera się na definicji środka ciężkości układu punktów materialnych. Załóżmy, że w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ umieszczono masy $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Oznaczmy przez m masę całego układu punktów $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ oraz przez O środek kartezjańskiego układu współrzędnych. Wtedy środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych nazywamy taki punkt S, że

$$\overrightarrow{OS} = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{OA_1} + \frac{m_2}{m}\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \frac{m_n}{m}\overrightarrow{OA_n}.$$

Nietrudno zauważyć, że wtedy dla dowolnego punktu P zachodzi

$$\overrightarrow{PS} = \frac{m_1}{m}\overrightarrow{PA_1} + \frac{m_2}{m}\overrightarrow{PA_2} + \ldots + \frac{m_n}{m}\overrightarrow{PA_n}.$$



Rozwiązanie z wykorzystaniem środka ciężkości. Niech środek układu współrzędnych O znajduje się w środku rozważanego koła. W każdym z punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ umieszczamy masę 1. Niech S będzie środkiem ciężkości tego układu punktów materialnych. Zauważamy, że S jest punktem wewnętrznym koła, gdyż z nierówności trójkąta mamy $OS \leqslant \frac{1}{100}(OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_{100}) < 1$. Niech P będzie dowolnym punktem z brzegu rozważanego koła. Wtedy z definicji S mamy $100\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \ldots + \overrightarrow{PA_{100}}$. Ponownie korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_{100} \geqslant 100PS.$$

Wystarczy więc tak wybrać punkt P, aby $PS \geqslant 1$, co zawsze jest możliwe (patrz rysunek).

* * *

W trakcie trwania zawodów finałowych VI OMG, o godzinie 11.00 w budynku Szkoły Przymierza Rodzin w Warszawie odbyło się Pierwsze Walne Zgromadzenie Delegatów Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej. Obecnych było 19 delegatów, co stanowi około 80% wszystkich wybranych delegatów.

Walne Zgromadzenie Delegatów SEM jednogłośnie przyjęło sprawozdanie z działalności Zarządu SEM oraz sprawozdanie z działalności Komisji Rewizyjnej SEM za ostatni rok sprawozdawczy.

W czasie dyskusji programowej poruszono dwa ważne tematy. Pierwszy to stworzenie internetowej bazy danych członków SEM ułatwiającej komunikację pomiędzy członkami. Drugim była organizacja czwartej konferencji SEM.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Andrzej FRYSZKOWSKI