Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 609 ($WT = 1{,}20$) i 610 ($WT = 3{,}03$) z numeru 11/2010

Jerzy Cisło	Wrocław	44,58
Michał Kieza	Warszawa	42,85
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03

W Klubie 44 M twarz doskonale znana: Jerzy Cisło – już ósmy raz!

Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

617. Znaleźć wszystkie funkcje F, określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m+2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C, a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A. Punkt Q jest środkiem odcinka BP. Wykazać, że $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle PCQ|$.

617. Niech F będzie jedną z szukanych funkcji. Oznaczmy wartości $F(1), \ldots, F(6)$ kolejno przez a, b, c, d, e, f; oznaczmy ponadto $F(8) = h$, $F(10) = j$. Kładąc w równaniu $m = n = 1$ oraz $m = n = 2$, dostajemy

(1) $$e = a^2, \qquad j = b^2.$$

Każda czwórka $(m, n; m', n')$, w której $3m + 2n = 3m' + 2n'$, daje informację w postaci równości $F(m)F(n) = F(m')F(n')$.

Biorąc czwórki $(3,2;1,5)$, $(5,1;3,4)$, $(3,1;1,4)$, $(4,1;2,4)$, $(3,3;1,6)$, otrzymujemy w ten sposób związki

(2) $$bc = ae = cd, \qquad ac = ad = bd, \qquad c^2 = af.$$

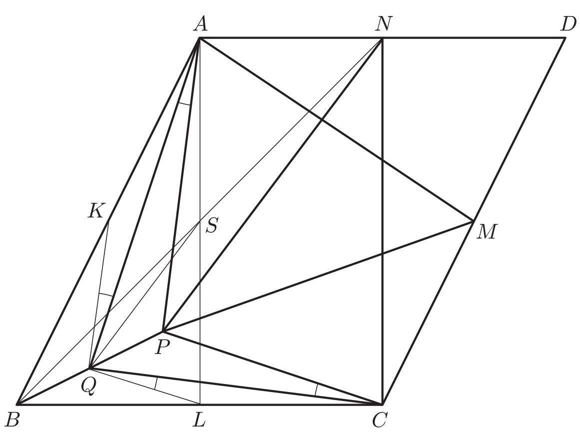
Natomiast czwórki $(3,3;1,6)$, $(6,1;4,4)$, $(6,6;8,3)$, $(2,10;8,1)$ dają zależności

(3) $$c^2 = af = d^2, \qquad f^2 = ch, \qquad bj = ah.$$

Jeżeli $a \neq 0$, to z pierwszej równości (1) oraz ze związków (2) wnosimy kolejno, że $e \neq 0$; $b, c, d \neq 0$; $b = d$; $c = d$; $a = b$; $c = e$; $f = c^2/a$. Tak więc $a = b = c = d = e = f$; skoro zaś $e = a^2$, ta wspólna wartość wynosi 1.

Jeżeli natomiast $a = 0$, to korzystamy z zależności (3) oraz (1) i łatwo stwierdzamy, że $c = d = f = 0$; $e = 0$; $b = 0$.

Zatem na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ funkcja F jest stała, o wartości 1 lub 0. Każda liczba naturalna $x > 6$ daje się zapisać w postaci $3m + 2n$ dla pewnych $m, n < x$. Przez oczywistą indukcję uzyskujemy wniosek, że F jest funkcją tożsamościowo równą 1 lub 0. Każda z nich spełnia zadane równanie.



618. Oznaczmy środki boków AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N. W myśl założenia, $|MP| = |MA|$, $|NP| = |NC|$. Niech S będzie wspólnym środkiem przekątnych AL i BN równoległoboku $ABLN$. Odcinek SQ łączy środki dwóch boków trójkąta NBP, więc

$$|SQ| = \frac{1}{2}|NP| = \frac{1}{2}|NC| = |SL| = |SA|.$$

Zatem punkt Q leży na okręgu o średnicy AL, wobec czego kąt AQL jest prosty. Analogicznie, kąt CQK jest prosty. Stąd wynika, że $|\sphericalangle AQK| = |\sphericalangle CQL|$.

Punkty K, Q są środkami dwóch boków trójkąta ABP, więc $KQ \parallel AP$. Analogicznie, $LQ \parallel CP$. Stąd, ostatecznie,

$$|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle AQK| = |\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle PCQ|.$$

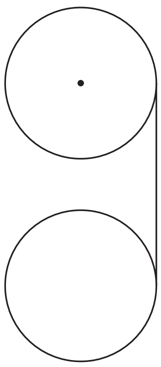
Klub 44

Rozwiązania zadań z numeru 3/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

514. Jednorodny krążek (blok) może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi, oznaczonej na rysunku kropką. Drugi taki sam krążek jest połączony z pierwszym nawiniętą na nie nitką. Z jakim przyspieszeniem spada dolny krążek?



515. Zbiornik zawierający $n = 100$ moli gazu doskonałego o temperaturze $T_1 = 400$ K i pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa znajduje się w otoczeniu powietrza atmosferycznego o temperaturze $T_0 = 290$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć maksymalną pracę, którą może wykonać zespół gaz+otoczenie (zarówno bezpośrednio, jak za pośrednictwem maszyn cieplnych). Ciepło molowe gazu przy stałej objętości jest równe $C_V = \frac{5}{2}R$.

514. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N, promień krążków przez r, a masę przez m. Równanie ruchu obrotowego ma dla każdego z krążków jednakową postać

$$Nr = I\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon,$$

gdzie I jest momentem bezwładności, a ε – przyspieszeniem kątowym, jednakowym – jak widać – dla obu krążków. Iloczyn $r\varepsilon$ jest przyspieszeniem pionowego odcinka nici, a także przyspieszeniem dolnego krążka względem tego odcinka. Zatem przyspieszenie a dolnego krążka względem układu nieruchomego jest równe

$$a = 2r\varepsilon.$$

Stąd $N = \frac{1}{2}mr\varepsilon = \frac{1}{4}ma$. Po podstawieniu tego wyrażenia do równania ruchu postępowego dolnego krążka

$$mg - N = ma$$

otrzymujemy rozwiązanie: $a = \frac{4}{5}$g.

515. Warunek maksymalnej pracy odpowiada doprowadzeniu gazu do temperatury T_0 i ciśnienia p_0 w procesie odwracalnym. Na przykład, można najpierw rozprężyć gaz adiabatycznie do temperatury T_0, a następnie dokonać sprężenia lub rozprężenia izotermicznego, aby osiągnąć ciśnienie p_0. Pomijając na razie pracę powietrza atmosferycznego, pracę przy rozprężeniu adiabatycznym W_{ad} znajdziemy jako różnicę początkowej i końcowej energii wewnętrznej:

$$W_{\mathrm{ad}} = nC_V(T_1 - T_0).$$

Praca przy rozprężeniu izotermicznym jest natomiast równa całce

$$\int p\,\mathrm{d}V = nRT_0 \int \mathrm{d}V/V = nRT_0 \ln(V_0/V'),$$

gdzie V' jest objętością gazu po rozprężeniu adiabatycznym, a V_0 – objętością końcową. Z równania przemiany adiabatycznej w zmiennych V-T

$$VT^{1/(\gamma-1)} = \mathrm{const} \qquad (\text{gdzie } \gamma = C_p/C_V,\ 1/(\gamma-1) = C_V/R)$$

znajdujemy

$$V' = V_1\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{C_V/R}.$$

Po podstawieniu $V_1 = nRT_1/p_1$, $V_0 = nRT_0/p_0$ dochodzimy do wzoru na pracę przy rozprężeniu izotermicznym

$$W_{\mathrm{izot}} = nRT_0\ln(V_0/V_1) - nC_VT_0\ln(T_1/T_0).$$

Dla przyjętych danych wielkość ta jest ujemna, bo $V' > V_0$ (mamy więc sprężenie izotermiczne, a nie rozprężenie). Od sumy $W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}}$ należy jeszcze odjąć pracę powietrza atmosferycznego

$$W_{\mathrm{atm}} = p_0(V_0 - V_1).$$

Ostatecznie

$$W = W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}} - W_{\mathrm{atm}} =$$
$$= nC_V\left(T_1 - T_0 - T_0\ln\frac{T_1}{T_0}\right) + nRT_0\ln\frac{p_1T_0}{p_0T_1} - nRT_0 + nR\frac{p_0}{p_1}T_1 = 49{,}5\ \mathrm{kJ}.$$

Ten sam wynik otrzymamy także w innych procesach odwracalnych prowadzących do wyrównania ciśnień i temperatur. Na przykład, można by najpierw w przemianie izochorycznej odwracalnie obniżyć temperaturę do T_0 (tzn. zastosować doskonały silnik cieplny korzystający z gazu w zbiorniku jako grzejnika, a z otoczenia jako chłodnicy), a następnie zastosować rozprężenie izotermiczne jak poprzednio.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 510 ($WT = 2{,}44$) i 511 ($WT = 1{,}60$) z numeru 1/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	39,05
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,64
Andrzej Idzik	Bolesławiec	32,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Michał Koźlik	Gliwice	19,00

Rozwiązanie zadania F 791.
Połączenia wg schematu pokazanego na rysunku poniżej pozwalają otrzymać każdą z trzech pożądanych mocy.