Kilka słów o wymiarze

Ideą teorii wymiaru jest przyporządkowanie przestrzeni X pewnej liczby całkowitej (wymiaru X) tak, by było to zgodne z intuicyjnym znaczeniem tego słowa. Dla uproszczenia skoncentrujemy się na podzbiorach przestrzeni Hilberta, która zawiera, między innymi, przestrzenie euklidesowe wszystkich wymiarów.

Oczywiste jest, że zbiór złożony ze skończenie wielu punktów ma wymiar 0, prosta euklidesowa $\mathbb{R}$ i odcinek – wymiar 1, płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ i koło – wymiar 2, a przestrzeń trójwymiarowa $\mathbb{R}^3$ i pełna kula – wymiar 3. Mając do czynienia z bardzo prostymi obiektami, uznajemy, że wymiar jest równy odpowiednio 1, 2 lub 3 wtedy, gdy uda się w nim umieścić odcinek, dwa lub trzy odcinki wzajemnie prostopadłe. Zastanówmy się, jakie własności powinno mieć przyporządkowanie zbiorowi jego wymiaru. Wydaje się przede wszystkim, że wymiar powinien być niezmiennikiem topologicznym. Jeżeli pełny kwadrat ma wymiar 2, to wymiar 2 powinien mieć także ten sam kwadrat po tym, jak się go powygina i porozciąga w różnych kierunkach. Spodziewamy się także, że wymiar przestrzeni $X = X_1 \cup X_2$, będącej sumą swoich domkniętych podzbiorów X_1, X_2 o wymiarach nie większych niż ustalona liczba n, także nie może być większy od n. Wynika stąd, że wymiar zbioru nie może być mniejszy niż wymiary jego podzbiorów. Nie może więc budzić także żadnych wątpliwości fakt, że wymiar wielościanu musi być równy największemu spośród wymiarów wszystkich sympleksów (odcinków, trójkątów, czworościanów itd.), których jest sumą (jest sumą skończenie wielu).

W wielu sytuacjach pojawiają się jednak obiekty bardziej złożone. Figury mogą np. być tak skomplikowane, że nie będą zawierać nie tylko żadnego odcinka, ale nawet podzbioru homeomorficznego z odcinkiem, a powinniśmy wiedzieć, w jaki sposób stwierdzić, czy są jedno-, dwu-, trój- czy więcej wymiarowe.

W 1912 roku Henri Poincaré zaproponował, by definicja wymiaru miała charakter indukcyjny oraz odwoływała się do własności rozcinania figury. Punktem wyjścia jego rozważań była obserwacja, że do rozcięcia prostej figury trójwymiarowej na części potrzeba powierzchni, do rozcięcia figury wymiaru 2 potrzebne są linie, a na to, by podzielić na części linię, potrzeba punktów.

Precyzyjną indukcyjną definicję wymiaru sformułowali niezależnie Paweł Uryson (1922) i Karl Menger (1923). Przyjęli oni, że zbiór pusty jest jedynym zbiorem o wymiarze równym -1. Jeżeli n jest liczbą naturalną lub 0, to wymiar $\dim X$ jest nie większy niż n, gdy dla każdego punktu $x \in X$ oraz każdego jego otoczenia U w X istnieje otwarte otoczenie $V \subset U$ tego punktu, którego ograniczenie $\mathrm{Fr}(V)$ ma wymiar $\dim \mathrm{Fr}(V) \leqslant n-1$. Jeżeli $\dim X \leqslant n$ i nie jest prawdą, że $\dim X \leqslant n-1$, to przyjmujemy, że $\dim X = n$. Jeżeli $\dim X \neq n$ dla $n = -1, 0, 1, \ldots$, to mówimy, że wymiar X jest nieskończony i piszemy $\dim X = \infty$.

Konsekwencją tej definicji jest np. to, że przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ i kostka wymiaru n nie mogą być rozcinane przez zbiory o wymiarze mniejszym niż $n-1$, natomiast podzbiór $\mathbb{R}^n$ może sam mieć wymiar n tylko wtedy, gdy ma punkty wewnętrzne, czyli zawiera kulę otwartą przestrzeni euklidesowej.

Mówimy, że zbiór L jest przegródką między rozłącznymi podzbiorami A i B zbioru X albo przegródką oddzielającą A od B, jeżeli $X \setminus L = U \cup V$, gdzie U i V są takimi rozłącznymi otwartymi podzbiorami X, że $A \subset U$, $B \subset V$. Oznacza to w szczególności, iż L jest domkniętym podzbiorem X. Odcinek łączący środki dwóch przeciwległych boków kwadratu jest przegródką oddzielającą dwa pozostałe boki. Żaden podzbiór kwadratu, położony w jego wnętrzu, nie może, oczywiście, ich oddzielać.

Wymiar przestrzeni można scharakteryzować, używając pojęcia przegródek. Nierówność $\dim X \leqslant n$ zachodzi mianowicie wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych rozłącznych podzbiorów domkniętych A i B istnieje przegródka L oddzielająca A od B o wymiarze $\dim L \leqslant n-1$.

Na płaszczyźnie euklidesowej jest znacznie więcej miejsca niż na prostej i mniej niż w przestrzeni trójwymiarowej. Uogólniając to, możemy się spodziewać, że w przestrzeni o większym wymiarze musi być więcej miejsca niż w przestrzeni o wymiarze mniejszym. Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to okazuje się, na przykład, że nierówność $\dim X \leqslant n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X zbiorami otwartymi można znaleźć drobniejsze pokrycie otwarte $\mathcal{V}$, które daje się rozłożyć na sumę $n+1$ rodzin $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$, takich że zbiory należące do jednej ustalonej rodziny $\mathcal{V}_i$ są parami rozłączne ($i = 0, 1, \ldots, n$). Można także wykazać, iż nierówność $\dim X \leqslant n$ jest równoważna temu, że dla każdego skończonego pokrycia otwartego przestrzeni X można znaleźć takie drobniejsze pokrycie skończone, że przecięcie każdych $n+2$ różnych zbiorów otwartych należących do niego jest zbiorem pustym.

Można się zastanawiać, czy lepszym i bliższym intuicji podejściem do problemu sformułowania ogólnej definicji wymiaru nie byłaby redukcja naszego zadania do badania wymiarów wielościanów coraz lepiej aproksymujących przestrzeń, której wymiar chcemy określić. Okazuje się jednak, że idąc tą drogą, otrzymuje się dokładnie to samo pojęcie, co poprzednio. Zbiór zwarty X ma w szczególności wymiar nie większy niż n wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przekształcenie f_ε w przestrzeń o tej własności, że punkt x oraz jego obraz $f_\varepsilon(x)$ są oddalone o mniej niż ε, natomiast obraz całego $f_\varepsilon(X)$ jest wielościanem wymiaru co najwyżej n.

Sławomir NOWAK
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski