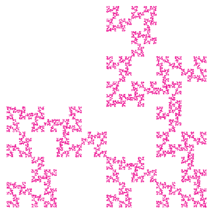


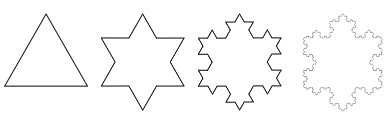
Jak wygląda zbiór π-wymiarowy, czyli o wymiarze fraktali

*Krzysztof BARAŃSKI**

Co to znaczy, że linia prosta jest jednowymiarowa, płaszczyzna – dwuwymiarowa, a przestrzeń, w której żyjemy – trójwymiarowa? Można na to pytanie odpowiedzieć w ten sposób: na prostej możemy poruszać się w jednym kierunku (właśnie wzdłuż tej prostej), na płaszczyźnie – w dwóch niezależnych kierunkach, a w przestrzeni – w trzech (prawo-lewo, przód-tył, góra-dół). (Pozostaje tylko sprecyzować, co to są niezależne kierunki, co nie jest już takie oczywiste.) Mówiąc nieco inaczej, do opisu punktu na prostej wystarczy jeden parametr rzeczywisty (jedna współrzędna), punkty na płaszczyźnie mają dwie współrzędne itd. Matematycy posługują się pojęciem przestrzeni n-wymiarowej (dla dowolnej liczby naturalnej n), która jest zbiorem punktów opisanych przez n współrzędnych.

Sytuacja jest trudniejsza, gdy chcemy powiedzieć, jaki jest wymiar bardziej skomplikowanych zbiorów. Naturalne jest przyjąć, że okrąg jest obiektem jednowymiarowym, bo może być sparametryzowany jedną współrzędną (kątem), a sfera (powierzchnia kuli) i torus (powierzchnia dętki) mają wymiar 2, bo parametryzują się dwiema współrzędnymi kątowymi. Są to przykłady tzw. gładkich rozmaitości, których wymiar jest łatwo określić jako liczbę parametrów potrzebnych do ich opisania. Ogólniej, istnieje pojęcie *wymiaru topologicznego*, który można zdefiniować dla szerokiej klasy zbiorów (patrz artykuł na stronie 7 bieżącego numeru *Delty*). Taki wymiar jest zawsze liczbą całkowitą.

Pod koniec XIX wieku w matematyce zaczęły pojawiać się niespotykane wcześniej obiekty geometryczne, charakteryzujące się skomplikowanym kształtem i zjawiskiem „samopodobieństwa" (podobieństwa dowolnie małych fragmentów do całości zbioru). Tego rodzaju zbiory nazywamy dziś *fraktalami.* Aby lepiej opisać geometrię takich obiektów, wykorzystuje się różne odmiany pojęcia wymiaru, zwane czasami wymiarami fraktalnymi. W odróżnieniu od „zwykłego" wymiaru, mogą one przyjmować wartości niecałkowite. Przyjrzymy się teraz na kilku przykładach, jak można takie wymiary zdefiniować i jak je obliczać.



Aby skonstruować krzywą Kocha, rysujemy trójkąt równoboczny o boku 1 i do każdego jego boku stosujemy następującą procedurę: dzielimy odcinek na trzy równe części, rysujemy brzeg trójkąta równobocznego o boku 1/3 (skierowanego „na zewnątrz" dużego trójkąta), którego podstawą jest środkowa część odcinka, i usuwamy tę podstawę. W ten sposób z każdego odcinka uzyskujemy łamaną złożoną z 4 odcinków o długości 1/3 – w sumie łamaną zamkniętą złożoną z 12 takich odcinków. Następnie stosujemy opisaną powyżej procedurę do każdego z tych 12 odcinków, uzyskując łamaną zamkniętą złożoną z 48 odcinków o długości 1/9. Postępujemy tak dalej i po n krokach mamy łamaną zamkniętą K_n złożoną z $3 \cdot 4^n$ odcinków o długości $1/3^n$. Można wykazać, że przy $n \to \infty$ krzywe K_n dążą do krzywej zamkniętej K, którą nazywamy krzywą Kocha.

Jednym z pierwszych fraktali, który pojawił się w matematyce, była *krzywa Kocha*, zwana też *płatkiem śniegu* (patrz rysunek). Przykład ten został podany przez szwedzkiego matematyka Helge von Kocha w 1904 roku. Jest to samopodobna krzywa zamknięta bez samoprzecięć, która ma nieskończoną długość i nie ma stycznej w żadnym punkcie. Można zauważyć, że chociaż krzywa Kocha jest topologicznie obiektem jednowymiarowym, to zajmuje „więcej miejsca" na płaszczyźnie niż zwyczajna gładka krzywa. Aby opisać liczbowo to zjawisko, można wprowadzić pojęcie *wymiaru samopodobieństwa* (ang. *similarity dimension*). Zauważmy, że jednowymiarowy odcinek ma następującą własność: dla każdej liczby naturalnej k jest sumą k odcinków o długości k razy mniejszej, o rozłącznych wnętrzach (tzn. stykających się tylko końcami). Każdy z tych odcinków jest obrazem dużego odcinka przy podobieństwie o skali $1/k$. Mamy więc

$$sN = 1,$$

gdzie $s = 1/k$ to skala podobieństwa, a $N = k$ to liczba przeskalowanych kopii dających w sumie cały zbiór. Spójrzmy teraz na dwuwymiarowy kwadrat: jest on sumą $N = k^2$ kwadratów o rozłącznych wnętrzach (stykających się tylko brzegiem), które są obrazami dużego kwadratu przy podobieństwach o skali $1/k$. Mamy zatem

$$s^2N = 1,$$

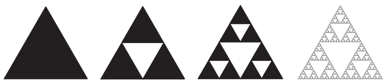
a więc wykładnik przy skali s w powyższym wzorze to wymiar obiektu (podobnie w poprzednim wzorze wykładnik przy s, równy 1, jest wymiarem odcinka). Dla trójwymiarowej kostki mamy, analogicznie,

$$s^3N = 1$$

dla $s = 1/k$ i $N = k^3$ (kostka jest sumą k^3 kostek o boku k razy mniejszym, o rozłącznych wnętrzach) i znowu wykładnik przy skali s jest równy wymiarowi zbioru.

A jak jest dla krzywej Kocha? Wygodnie jest podzielić ją na trzy części (każda powstała z jednego boku dużego trójkąta) i rozpatrzyć każdą z nich osobno. Zauważmy, że taka część jest sumą czterech swoich kopii (stykających się tylko w pojedynczych punktach) przy odpowiednich podobieństwach o skali 1/3 (patrz też strona 15).

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Trójkąt Sierpińskiego, opisany przez Wacława Sierpińskiego w 1915 roku, jest zdefiniowany w następujący sposób. Zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku 1, dzielimy ten trójkąt na cztery trójkąty równoboczne o boku 1/2 i usuwamy wnętrze środkowego. Następnie stosujemy tę samą procedurę do każdego z pozostałych trzech trójkątów, potem do kolejnych 9 trójkątów o boku 1/4 i tak dalej. Po n krokach konstrukcji uzyskujemy zbiór T_n złożony z 3^n trójkątów o boku $1/2^n$. Trójkąt Sierpińskiego to część wspólna $T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$.

Wynika to wprost z konstrukcji płatka śniegu. Jeśli więc wymiar takiej części byłby równy w, to powinno zachodzić

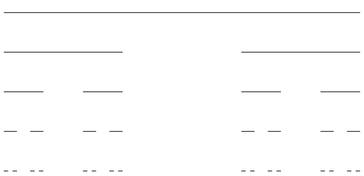
$$s^w N = 1$$

dla $s = 1/3$ i $N = 4$, czyli

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^w = 1.$$

To równanie jest spełnione dla $w = \log 4/\log 3 \approx 1{,}261859$ (zauważmy, że można tu wziąć logarytm o dowolnej podstawie, co nie ma wpływu na wynik). Tę właśnie liczbę w nazywamy wymiarem samopodobieństwa krzywej Kocha. Jest to liczba leżąca pomiędzy 1 i 2, co odzwierciedla wysoki „stopień skomplikowania” tej krzywej.

Taki wymiar możemy łatwo obliczyć dla różnych samopodobnych zbiorów, które są sumą kilku swoich kopii o rozłącznych „wnętrzach”, przy podobieństwach o danej skali. Jeśli mamy N takich kopii, a skala jest równa s, to ten wymiar jest równy $-\frac{\log N}{\log s}$. Na przykład, wymiar samopodobieństwa trójkąta Sierpińskiego jest równy $\log 3/\log 2 \approx 1{,}584962$, a dla zbioru Cantora jest on równy $\log 2/\log 3 \approx 0{,}630929$ (patrz rysunki).



Zbiór Cantora został zdefiniowany przez Georga Cantora w 1883 roku. Konstrukcja jest następująca. Odcinek $[0,1]$ dzielimy na trzy odcinki o długości 1/3 i usuwamy wnętrze środkowego odcinka, czyli otwarty odcinek $(1/3, 1/3)$. Następnie tę samą procedurę stosujemy do pozostałych dwóch odcinków, potem do pozostałych czterech odcinków o długości 1/9 i tak dalej. Po n krokach konstrukcji uzyskujemy zbiór C_n składający się z 2^n rozłącznych odcinków o długości $1/3^n$. Zbiór Cantora to $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Możemy jeszcze uogólnić nasz wzór na przypadek, gdy badany obiekt jest sumą N swoich kopii o rozłącznych „wnętrzach”, uzyskanych przez podobieństwa o różnych skalach, powiedzmy $s_1, \ldots, s_N$, gdzie $s_i \in (0,1)$. Wymiar samopodobieństwa jest wtedy taką liczbą w, dla której zachodzi

$$s_1^w + \cdots + s_N^w = 1.$$

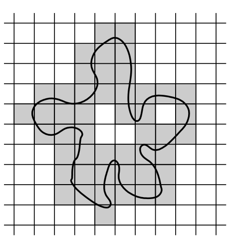
Taka liczba w zawsze istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie (dlaczego?).

Wadą wymiaru samopodobieństwa jest to, że jest zdefiniowany tylko dla szczególnego rodzaju zbiorów, uzyskanych przez procedury podobne do opisanych powyżej. Dla innych zbiorów potrzebne jest więc ogólniejsze pojęcie wymiaru „fraktalnego”. Zdefiniujemy teraz *wymiar pudełkowy* (ang. *box dimension*, *box-counting dimension*), zwany też *wymiarem Minkowskiego* lub *Minkowskiego–Bouliganda*. Oznaczany jest zwykle $\dim_B$ lub BD.

Weźmy pod uwagę dowolny ograniczony zbiór A na płaszczyźnie. Dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje taka liczba naturalna N, że możemy pokryć nasz zbiór N kwadratami o boku δ (dlaczego?). Niech $N(\delta)$ będzie najmniejszą taką liczbą N. Wtedy wymiar pudełkowy zbioru A jest równy

$$\dim_B(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

(podobnie jak poprzednio, ta wartość nie zależy od wyboru podstawy logarytmu). Nietrudno wykazać (jak?), że wynik będzie ten sam, jeśli zamiast dowolnych kwadratów o boku δ weźmiemy kwadraty tworzące na płaszczyźnie kratę o boku δ (patrz rysunek). Możemy też zastąpić kwadraty kołami o średnicy δ.



Obliczanie wymiaru pudełkowego krzywej.

Jeśli zbiór jest podzbiorem prostej, to zamiast kwadratów bierzemy odcinki o długości δ, a jeśli jesteśmy w przestrzeni trójwymiarowej, to kwadraty zastępujemy kostkami o boku δ lub kulami o średnicy δ. Ogólnie, definicję rozszerza się na ograniczone podzbiory przestrzeni n-wymiarowej.

Górna (dolna) granica funkcji $f(x)$ przy $x \to a$ to największa (najmniejsza) z granic ciągu $f(x_n)$ przy dowolnym wyborze ciągu $x_n \to a$, $x_n \neq a$.

Może się zdarzyć, że granica w definicji wymiaru pudełkowego nie istnieje. Wtedy trzeba zastąpić zwykłą granicę przez granicę górną lub dolną, uzyskując tzw. górny lub dolny wymiar pudełkowy.

Można łatwo sprawdzić (jak?), że wymiar pudełkowy odcinka jest równy 1, kwadrat ma wymiar pudełkowy 2 i tak dalej. A jaki jest wymiar pudełkowy zbioru Cantora C? Dla $\delta = 1/3^n$ mamy $N(1/3^n) \leqslant 2^n$, bo C jest pokryty przez 2^n odcinków o długości $1/3^n$, powstałych po n krokach konstrukcji. Z drugiej strony, końce tych wszystkich odcinków należą do zbioru Cantora, a „dziury” między nimi są długości co najmniej $1/3^n$ i łatwo zauważyć, że $N(1/3^n) \geqslant 2^n$. Mamy więc $N(1/3^n) = 2^n$, więc

$$\frac{\log N(1/3^n)}{-\log(1/3^n)} = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 2}{\log 3},$$

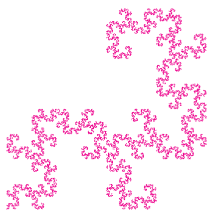
W latach 60. XX w. obliczono (oczywiście w przybliżeniu) wymiar pudełkowy brzegu Wielkiej Brytanii, mierząc go z coraz większą dokładnością (od 200 km do 20 m). Okazało się, że jest on większy od 1 i wynosi około 1,2.

co jest równe wymiarowi samopodobieństwa. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że przy obliczaniu granicy w definicji wymiaru pudełkowego wystarczy brać $\delta = 1/3^n$, co daje $\dim_B(C) = \log 2/\log 3$. Podobnie wyznaczamy wymiar pudełkowy trójkąta Sierpińskiego i krzywej Kocha. We wszystkich tych przykładach (i podobnych konstrukcjach) wymiar pudełkowy jest równy wymiarowi samopodobieństwa.

Wymiar pudełkowy nie ma jednak najlepszych własności matematycznych. Na przykład, okazuje się, że wymiar pudełkowy domknięcia zbioru A jest taki sam, jak wymiar samego zbioru A, co implikuje w szczególności, że zbiór liczb wymiernych w odcinku $[0,1]$ ma wymiar pudełkowy 1. Przy „porządnej" definicji wymiaru każdy przeliczalny zbiór powinien mieć wymiar zero! Jakie jest więc pojęcie fraktalnego wymiaru, które zadowoli wymagającego matematyka?

Zbiór przeliczalny to zbiór, którego wszystkie elementy można ustawić w ciąg $a_1, a_2, \ldots$ Takim zbiorem jest np. zbiór liczb wymiernych.

Takim wymiarem jest *wymiar Hausdorffa*, zwany też czasami *wymiarem Hausdorffa–Besicovitcha*. Jego definicja jest jednak znacznie bardziej skomplikowana niż poprzednie. Omówimy ją teraz.



Niech A będzie dowolnym podzbiorem n-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ustalmy $s > 0$. Weźmy pod uwagę dowolne przeliczalne pokrycie zbioru A, to znaczy zbiory $U_1, U_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$, takie że $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. (Zamiast dowolnych zbiorów można wziąć kule w $\mathbb{R}^n$, to znaczy odcinki na prostej dla $n = 1$, koła na płaszczyźnie dla $n = 2$, zwykłe kule w przestrzeni trójwymiarowej dla $n = 3$ itd.) Dla danej liczby $\delta > 0$ definiujemy

$$H^s_\delta(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s,$$

gdzie diam oznacza średnicę zbioru, a infimum jest wzięte po wszystkich takich pokryciach $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbioru A, że $\operatorname{diam} U_i < \delta$ dla wszystkich U_i.

Średnica zbioru U (ozn. $\operatorname{diam} U$) to supremum odległości dowolnych dwóch punktów z U.
Supremum zbioru $X \subset \mathbb{R}$ (ozn. $\sup X$) to najmniejsza liczba nie mniejsza od wszystkich liczb ze zbioru X. Jeśli takiej liczby nie ma, to przyjmujemy $\sup X = +\infty$.
Infimum zbioru $X \subset \mathbb{R}$ (ozn. $\inf X$) to największa liczba nie większa od wszystkich liczb ze zbioru X. Jeśli takiej liczby nie ma, to przyjmujemy $\inf X = -\infty$.

Bierzemy teraz

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0^+} H^s_\delta(A).$$

Ta granica zawsze istnieje (być może równa $+\infty$), bo $H^s_\delta(A)$ maleje przy wzroście δ. Liczbę $H^s(A)$ nazywamy s-tą *miarą* (*zewnętrzną*) *Hausdorffa* zbioru A. Okazuje się, że istnieje taka liczba $t \geqslant 0$, że $H^s(A) = +\infty$ dla wszystkich $s < t$ i $H^s(A) = 0$ dla wszystkich $s > t$. Tę liczbę t nazywamy *wymiarem Hausdorffa* zbioru A i oznaczamy $\dim_H(A)$ lub $\mathrm{HD}(A)$.

Wymiar Hausdorffa ma dobre właściwości matematyczne. Można sprawdzić, że $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$ i $\dim_H(A) = 0$ dla każdego przeliczalnego zbioru A. Poza tym, $\dim_H(M) = m$ dla każdej gładkiej rozmaitości m-wymiarowej M. Mamy też $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup\{\dim_H(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, \ldots$

Dla $s = n$ miara Hausdorffa jest równoważna „zwykłej" mierze Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

Wadą wymiaru Hausdorffa jest to, że zazwyczaj jest trudny do obliczenia! Już obliczenie tego wymiaru dla zbioru Cantora nastręcza trudności, a przypadek trójkąta Sierpińskiego czy krzywej Kocha wymaga zastosowania odpowiednich narzędzi z geometrycznej teorii miary, teorii potencjału lub transformaty Fouriera. Pewnym ułatwieniem jest nierówność

$$\dim_H(A) \leqslant \dim_B(A),$$

która zachodzi dla wszystkich zbiorów A (jeśli granica w definicji wymiaru pudełkowego nie istnieje, to bierzemy dolny wymiar pudełkowy). W przypadku zbioru Cantora, krzywej Kocha i trójkąta Sierpińskiego mamy równość wymiarów Hausdorffa i pudełkowego, jednak taka sytuacja nie zawsze zachodzi (patrz np. zadanie na marginesie).

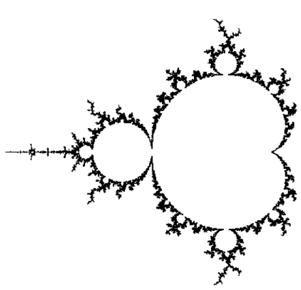
Zadanie. Wyznaczyć wymiar pudełkowy i wymiar Hausdorffa zbiorów $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ i $B = \{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Odp.: $\dim_B(A) = 1/2$, $\dim_B(B) = 0$, $\dim_H(A) = \dim_H(B) = 0$.

Odnotujmy jeszcze ważne twierdzenie Szpilrajna, mówiące o tym, że wymiar Hausdorffa jest większy lub równy wymiarowi topologicznemu. Z tego powodu fraktale można zdefiniować jako zbiory, dla których ta nierówność jest ostra.

Jest jeszcze kilka innych wymiarów fraktalnych, takich jak wymiar Rényi, wymiar korelacyjny czy wymiar pakujący, ale nie będziemy tu o nich mówili.

Na koniec odpowiemy na pytanie zawarte w tytule: jak może wyglądać zbiór π-wymiarowy? Aby zdefiniować taki zbiór, przeprowadzimy konstrukcję podobną jak dla zbioru Cantora, z tym że w każdym kroku będziemy zmieniać liczbę wyjętych odcinków i skalę zmniejszania. Niech dla każdej liczby naturalnej n zbiór $C_n \subset [0,1]$ składa się z N_n rozłącznych odcinków o długości $d_n = N_n^{1/(3-\pi)}$ każdy, rozłożonych tak, że odległości między środkami kolejnych odcinków są równe $1/N_n$. Definiujemy zbiór „typu Cantora" jako $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Okazuje się, że jeżeli liczby N_n rosną dostatecznie szybko wraz ze wzrostem n, to wymiar Hausdorffa zbioru C jest równy $\pi - 3$ (nie dowodzimy tutaj tego, zauważmy tylko, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\log N_n}{-\log d_n} = \pi - 3$). Wtedy zbiór $C \times \mathbb{R}^3$ (iloczyn kartezjański zbioru C i przestrzeni trójwymiarowej), zawarty w przestrzeni czterowymiarowej, ma wymiar Hausdorffa równy π.



W 1991 roku Mitsuhiro Shishikura udowodnił, że brzeg zbioru Mandelbrota ma wymiar Hausdorffa równy 2.