Interpolacja fraktalna,
czyli dwukrotne fałszerstwo na zamówienie

Irmina HERBURT, Paweł RZĄŻEWSKI**

Pierwsze fałszerstwo – interpolacja

Urządzenie pomiarowe zmierzyło wartości pewnej wielkości w czterech momentach (rys. 1). Wiemy więc bardzo niewiele o zależności tej wielkości od czasu.

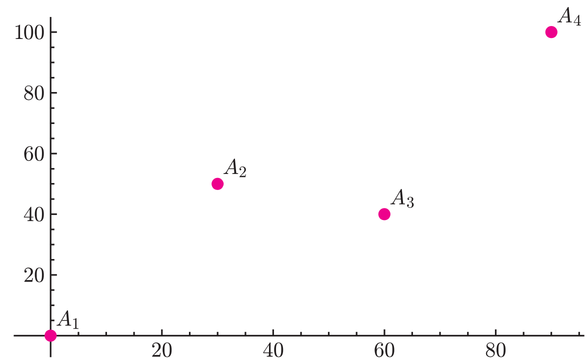
Mimo to chcielibyśmy odtworzyć brakujące punkty wykresu, kierując się następującymi informacjami:

- pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi punktami dzieje się tak dużo, jak pomiędzy pierwszym i ostatnim, tzn. kawałki wykresów pomiędzy kolejnymi punktami są takie, jak cały wykres po odpowiednim „przeskalowaniu",
- wykres funkcji jest linią ciągłą.

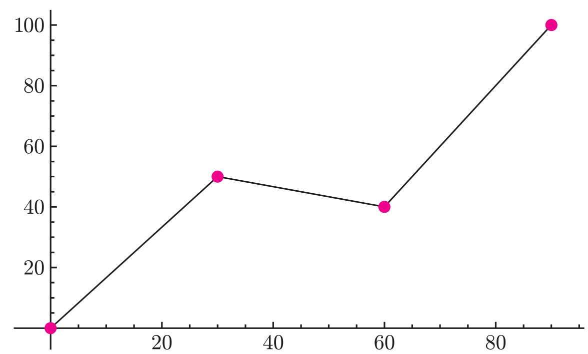
Z wielu możliwych funkcji, które spełniają powyższe warunki, wybierzemy taką, która da się łatwo opisać. Punkty z wykresu tej funkcji potraktujemy jako uzupełnienie brakujących danych. Będzie to więc świadome fałszerstwo.

Taki sposób uzupełniania danych nazywamy *interpolacją*. Według *Słownika wyrazów obcych PWN* jednym ze znaczeń słowa „interpolować" jest zmieniać, fałszować tekst za pomocą wstawek. W matematyce jednak interpolacja to odtworzenie punktów z danych, według ustalonej metody, z których najprostsza jest *interpolacja liniowa* – w niej brakujące punkty wykresu uzupełnia się, łącząc kolejno dane punkty odcinkami (rys. 2).

Tutaj użyjemy innej metody, która pozwoli uzyskać wykres samopodobny, czyli będący fraktalem.



Rys. 1



Rys. 2

Konstrukcja interpolacji fraktalnej

1. Tworzymy łamaną łączącą kolejne punkty $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4)$. Otrzymujemy w ten sposób interpolację kawałkami liniową K_1.

2. Otrzymaną łamaną K_1 przeskalujemy (zwęzimy i ściśniemy) i wstawimy pomiędzy punkty A_1 i A_2 (rys. 3).

Podobnie łamaną K_1 przekształcimy i wstawimy kolejno pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz A_3 i A_4.

Przekształcenie „przeskalowania" można opisać, podając wzór, według którego przekształcane są współrzędne punktów płaszczyzny. W naszym przypadku punkt o współrzędnych (x, y) przejdzie na punkt o współrzędnych (x', y') zgodnie z regułą

$$x' = ax + by + e, \quad y' = cx + dy + f.$$

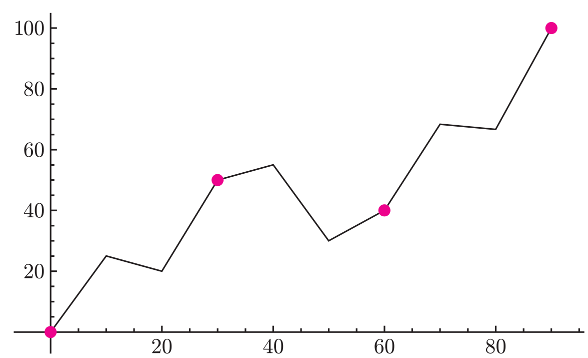
W przekształceniu f_1, które odwzorowuje łamaną K_1 w łamaną łączącą punkty A_1 i A_2, mamy

$$a = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1}, \quad b = 0, \quad d = 0{,}5, \quad c = \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_1} - d \cdot \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1},$$

$$e = \frac{x_4 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_1}{x_4 - x_1}, \quad f = \frac{x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_4 - x_1}.$$

Współczynnik d możemy wybrać dowolnie spomiędzy liczb z przedziału $[0, 1)$. Od niego zależy, jak bardzo „postrzępiona" jest końcowa krzywa fraktalna.

Podobnymi wzorami opisujemy przekształcenia φ_2 i φ_3, które „wstawiają" łamaną K_1 odpowiednio pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz A_3 i A_4.



Rys. 3

3. W każdym następnym kroku powtarzamy te same czynności: krzywą otrzymaną w kroku poprzednim odwzorowujemy przekształceniem φ_1 pomiędzy punkty A_1 i A_2, przekształceniem φ_2 pomiędzy punkty A_2 i A_3 oraz przekształceniem φ_3 pomiędzy punkty A_3 i A_4.

Im więcej tych kroków wykonamy, tym dokładniejsze przybliżenie granicznej krzywej fraktalnej dostaniemy. W granicznej krzywej K_∞ każdy kawałek pomiędzy punktami A_i oraz A_{i+1}, dla $i = 1$, 2 lub 3, jest podobny (afinicznie) do całości, a cała krzywa jest sumą swoich trzech kopii: $K_\infty = \varphi_1(K_\infty) \cup \varphi_2(K_\infty) \cup \varphi_3(K_\infty)$.

*Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Drugie fałszerstwo – narysowanie krzywej fraktalnej

Wszystkie obrazki krzywych fraktalnych powstają po wykonaniu tylko skończonej liczby kroków algorytmu, są to więc tylko przybliżenia granicznego fraktalnego obiektu.

Do narysowania (w przybliżeniu) krzywej K_∞ użyjemy tzw. algorytmu probabilistycznego. Tworzy on ciąg punktów coraz gęściej wypełniający wykres krzywej (rys. 4 i 5).

Algorytm probabilistyczny to następujący sposób postępowania.

Aby narysować zbiór samopodobny K, który jest sumą swoich kopii, tzn.

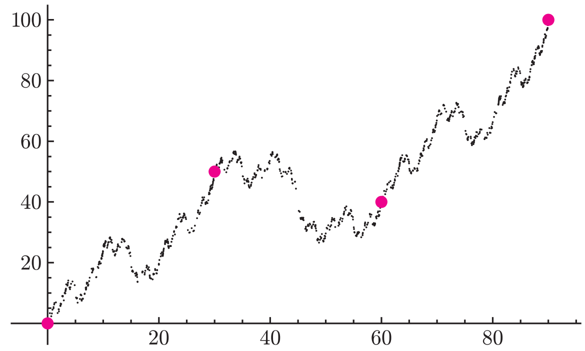
$$K = \varphi_1(K) \cup \varphi_2(K) \cup \ldots \cup \varphi_n(K),$$

tworzymy ciąg punktów $p_1, p_2, \ldots$ wypełniających odpowiednio gęsto zbiór K. Algorytm wybiera punkt startowy p_1 i powtarza następujące operacje:

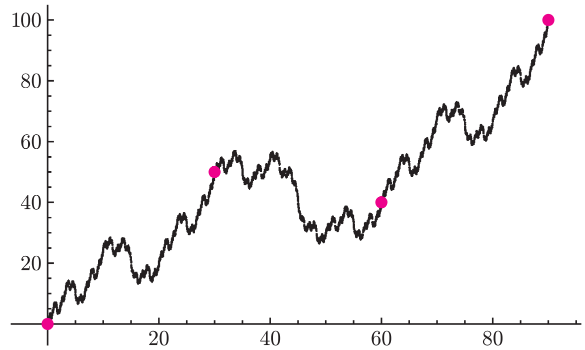
– losuje liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (numer przekształcenia),
– przekształca wylosowanym przekształceniem poprzednio znaleziony punkt ciągu i tworzy w ten sposób następny punkt ciągu.

Oto stosowna procedura.

$n \leftarrow$ liczba iteracji algorytmu
$N \leftarrow$ liczba punktów startowych
$(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N) \leftarrow$ punkty startowe, uporządkowane względem pierwszej współrzędnej
$d = (d_1, d_2, \ldots, d_N) \leftarrow$ parametr skali
$\Delta \leftarrow x_N - x_1$
Dla $i \leftarrow 2, \ldots, N$ **wykonaj**
  $a_i \leftarrow \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\Delta}$
  $e_i \leftarrow \dfrac{x_N \cdot x_{i-1} - x_1 \cdot x_i}{\Delta}$
  $c_i \leftarrow \dfrac{y_i - y_{i-1}}{\Delta} - d_i \cdot \dfrac{y_N - y_1}{\Delta}$
  $f_i \leftarrow \dfrac{x_N \cdot y_{i-1} - x_1 \cdot y_i}{\Delta} - d_i \cdot \dfrac{x_N \cdot y_1 - x_1 \cdot y_N}{\Delta}$
$(X, Y) \leftarrow (x_1, y_1)$;
Dla $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **wykonaj**
  $k \leftarrow$ losowa liczba ze zbioru $\{2, \ldots, N\}$
  $X' = a_k \cdot X + e_k$
  $Y' = c_k \cdot X + d_k \cdot Y + f_k$
  $(X, Y) \leftarrow (X', Y')$
  Dodaj punkt (X, Y) do wykresu

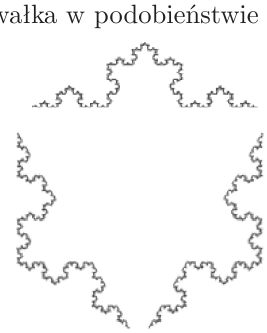


Rys. 4. Krzywa fraktalna po 5000 iteracji algorytmu probabilistycznego.



Rys. 5. Krzywa fraktalna po 50 000 iteracji algorytmu probabilistycznego.

Płatek śniegu nie jest sumą swoich kopii, ale składa się z trzech kawałków, z których każdy jest już sumą swoich czterech kopii – każda kopia jest podobna do całego kawałka w podobieństwie o skali 1/3.



Opisz wzorami te podobieństwa i zastosuj algorytm probabilistyczny do narysowania płatka śniegu.

Trójkąt Sierpińskiego jest sumą swoich trzech kopii, możemy więc zastosować do jego narysowania algorytm probabilistyczny. Dla opisania wzorami odpowiednich przekształceń umieścimy wierzchołki trójkąta w punktach o współrzędnych $(0,0), (1,0), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$n \leftarrow$ liczba iteracji algorytmu
`/* Zdefiniujmy następujące */`
`/* przekształcenia punktu` $x = (x_1, x_2)$ `*/`
Zdefiniuj
  $\varphi_1((x_1, x_2)) \leftarrow \left(\dfrac{x_1}{2}, \dfrac{x_2}{2}\right)$
  $\varphi_2((x_1, x_2)) \leftarrow \left(\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{1}{4}, \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{1}{2}\right)$
  $\varphi_3((x_1, x_2)) \leftarrow \left(\dfrac{x_1}{2} + \dfrac{1}{2}, \dfrac{x_2}{2}\right)$
$x \leftarrow (0, 0)$
Dla $i \leftarrow 1, \ldots, n$ **wykonaj**
  $k \leftarrow$ losowa liczba ze zbioru $\{1, 2, 3\}$
  $x \leftarrow \varphi_k(x)$
  Dodaj punkt x do wykresu