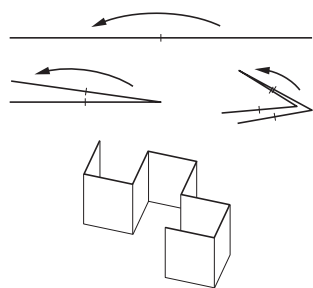
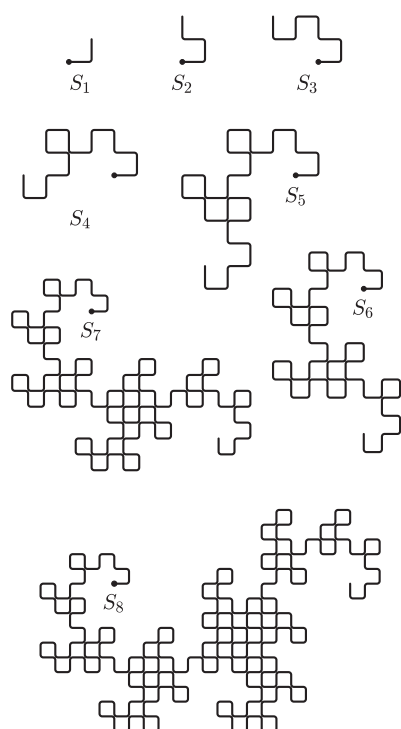


# Fraktalny świat papierowej tasiemki

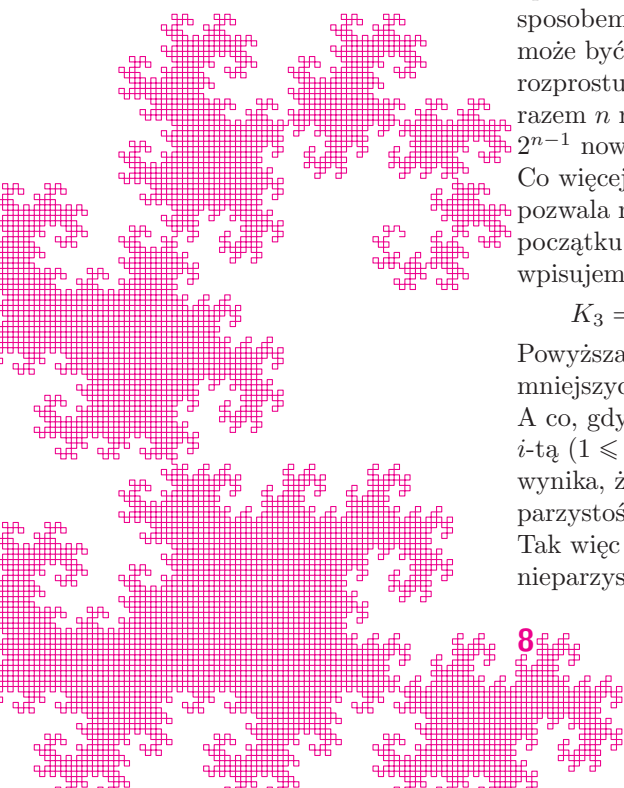
Tomasz IDZIASZEK



Rys. 1. Składanie paska papieru.



Rys. 2. Rodzina smoczyczych krzywych;  $S_n$  jest krzywą rzędu  $n$ . Poniżej fragment  $S_{14}$ .



Weźmy długi pasek papieru i złożmy go na pół. Następnie, nie rozkładając, złożmy go w tę samą stronę jeszcze dwa razy. W końcu, rozprostujemy złożenia tak, by papier zgiął się pod kątem  $90^\circ$ . Otrzymamy obiekt jak na rysunku 1.

Jeśli przerysujemy kształt, który przyjmuje górna krawędź tasiemki, dostaniemy ciekawą krzywą. Gdy złożymy papier nie trzy, ale cztery lub więcej razy, krzywa, jaką otrzymamy, stanie się bardziej złożona (rys. 2). Coraz bardziej przypominać będzie brodzącego w wodzie smoka, stąd też jej nazwa – *smoczca krzywa*. Po raz pierwszy była badana w roku 1966 przez fizyków z NASA: Johna Heighwaya i Williama Hartera. Do jej popularyzacji przyczynili się Martin Gardner w swoich *Grach Matematycznych* oraz pisarz Michael Crichton: jeden z bohaterów jego powieści *Park Jurajski*, specjalizujący się w teorii chaosu matematyk Ian Malcolm, ilustrował za pomocą smoczej krzywej swoje przemyślenia na temat przyszłości tak skomplikowanych przedsięwzięć, jak wskrzeszanie wymarłych gadów. Swoją drogą, krzywa  $S_8$  równie dobrze jak smoka przypomina dinozaura.

Jeśli całkowicie rozprostujemy tasiemkę, to na jej powierzchni dostrzeżemy rowki i górki. Odpowiadają one zakrętom, które będziemy brać, jeśli poczynając od wyróżnionego końca krzywej, będziemy ją rysować ołówkiem: rowek to zakręt w lewo (L), górka – w prawo (P). Jeśli zgięliśmy papier  $n$  razy, wskutek czego otrzymaliśmy krzywą rzędu  $n$ , to zrobimy  $2^n - 1$  zakrętów. Oznaczmy przez  $K_n$  słowo składające się z liter L i P, opisujące ciąg zakrętów na krzywej rzędu  $n$ . Mamy:

$$K_1 = L, \quad K_2 = LLP, \quad K_3 = LLPLLPP.$$

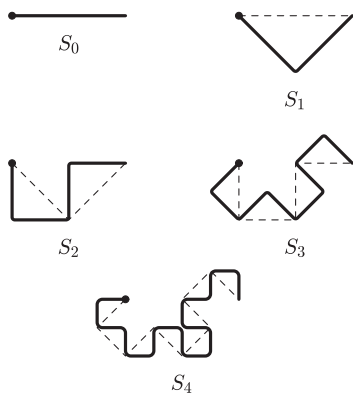
Ponieważ nasze możliwości składania papieru są dość ograniczone, spróbujemy znaleźć jakąś regułę opisującą słowo  $K_n$ , która pozwoli nam rysować dowolnie duże krzywe bez konieczności prośzenia o pomoc specjalisty od origami. Złożymy tasiemkę  $n$  razy, a następnie rozprostujemy ostatnie  $n - 1$  złożeń. Na powierzchni widzimy  $2^{n-1} - 1$  zagięć, które powstały ze złożenia paska  $n - 1$  razy, zatem opisuje je słowo  $K_{n-1}$ . Jeśli rozprostujemy pasek papieru  $n$ -ty raz, to będą one pierwszymi zagięciami, zatem słowo  $K_n$  zawsze zaczyna się od  $K_{n-1}$ . Zauważmy ponadto, że rowki na jednej połowie papieru odpowiadają górkom na drugiej połowie i vice versa. Innymi słowy, jeśli  $i$ -tym zagięciem (dla  $1 \leq i < 2^{n-1}$ ) w  $K_n$  jest rowek, to  $i$ -tym zagięciem *od końca* będzie górka. Wprowadźmy operację  $r$ , która odwraca kolejność liter w słowie i jednocześnie zamienia literę L z P, dla przykładu  $r(K_2) = LPP$ . Wtedy

$$K_n = K_{n-1} L r(K_{n-1}).$$

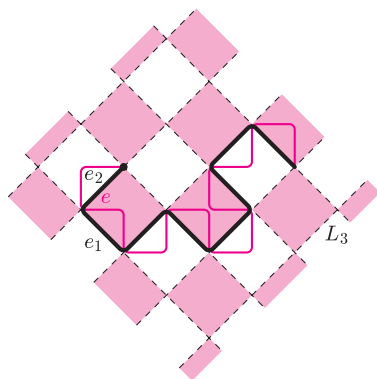
Sprawdzamy, że istotnie  $K_2 = K_1 L r(K_1) = L L P$  oraz  $K_3 = LLP L r(LLP)$ . Tym sposobem uzyskaliśmy rekurencyjny wzór na słowo  $K_n$ . Okazuje się jednak, że może być ono opisane również w inny sposób. Złożymy pasek papieru  $n - 1$  razy, rozprostujemy go, a następnie pomalujemy zagięcia. Następnie złożymy go znowu, tym razem  $n$  razy, i rozprostujemy. Zauważmy, że  $n$ -te złożenie spowodowało powstanie  $2^{n-1}$  nowych zagięć, które pojawiły się pomiędzy pomalowanymi zagięciami. Co więcej, nowe zagięcia występują regularnie: na przemian rowek i górka. To pozwala nam wyprowadzić nowy wzór: aby uzyskać  $K_n$ , wstawiamy puste pola na początku i na końcu słowa  $K_{n-1}$  oraz między jego kolejnymi literami. Następnie wpisujemy w puste pola na przemian literę L i P. Zatem  $K_4$  powstaje następująco:

$$K_3 = LLPLLPP \rightarrow \_L\_L\_P\_L\_L\_P\_P\_ \rightarrow \underline{LLPLLPLLPLLPLLPP} = K_4.$$

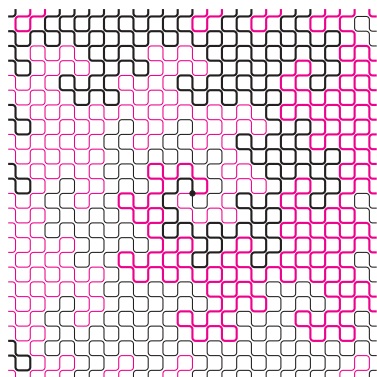
Powyższa metoda jest również rekurencyjna (tzn. odwołuje się do słów dla mniejszych krzywych), ponadto obie metody konstruują słowa w całości. A co, gdybyśmy chcieli mieć wzór na  $i$ -ty zakręt na krzywej rzędu  $n$ , tzn. na  $i$ -tą ( $1 \leq i < 2^n$ ) literę słowa  $K_n$ ? To proste: z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że jeśli  $i$  jest nieparzyste, to tą literą jest L lub P w zależności od parzystości  $(i - 1)/2$ . W przeciwnym przypadku jest to litera  $i/2$  w słowie  $K_{n-1}$ . Tak więc jeśli  $p$  jest największą potęgą dwójki dzielącą  $i$ , czyli  $i = 2^p m$  dla nieparzystego  $m$ , to szukaną literą jest L wtedy, gdy  $(m - 1)/2$  jest parzyste.



Rys. 3. Proces budowania krzywej  $S_n$  (linia ciągła) na krzywej  $S_{n-1}$  (linia przerywana).



Rys. 4. Siatka  $L_3$  pomalowana w „szachownicę”. Na czarno zaznaczono krzywą  $S_3$ , kolorem – krzywą  $S_4$ .



Rys. 5. Cztery nieskończone smocze krzywe wypełniające płaszczyznę.

#### Bibliografia

- [1] Gerald Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, 2008.
- [2] Chandler Davis, Donald Knuth, *Number Representations and Dragon Curves*, Journal of Recreational Mathematics 3 (1970), 66–81, 133–149. Także w: Donald Knuth, *Selected Papers on Fun and Games*, CSLI Publications, 2011.

Ponieważ słowo  $K_n$  zawsze zaczyna się od  $K_{n-1}$ , więc krzywą rzędu  $n$  możemy narysować, przedłużając krzywą rzędu  $n - 1$ . Z tego wynika naturalna konstrukcja *nieskończonej smoczej krzywej*, która odpowiada słowu

$$K_\infty = L LP LLPP LLLPPLPP LLLPLPPPLLPPLPP \dots$$

Rysując smoczą krzywą coraz wyższych rzędów, dostrzeżemy jej zaskakującą własność: krzywa ta nie ma samoprzecięć! Co więcej, o ile będziemy pamiętali, by na każdym zakręcie robić mały łuk, to krzywa ta żadnego punktu nie odwiedza dwa razy. Zanim udowodnimy, że jest tak w istocie, spójrzmy na jeszcze jeden sposób, w jaki możemy otrzymać smoczą krzywą. Zaczniemy od odcinka o długości 1, który jest smoczą krzywą rzędu 0; oznaczmy go przez  $S_0$  (rys. 3). Teraz zbudujemy na tym odcinku trójkąt prostokątny równoramienny, dorysowując dwa odcinki o długościach  $1/\sqrt{2}$ . Te przyprostokątne tworzą krzywą rzędu 1. I dalej: na krzywej  $S_{n-1}$  dobudowujemy  $2^{n-1}$  trójkątów, naprzemiennie po prawej i lewej stronie krzywej – w ten sposób uzyskujemy  $S_n$ . Zauważmy, że choć krzywa  $S_n$  składa się z  $2^n$  kawałków, to jej długość wynosi  $(\sqrt{2})^n$ , gdyż odcinki kolejnych rzędów są  $\sqrt{2}$  razy krótsze. Jeśli będziemy wykonywać tę operację dalej, to w granicy otrzymamy nieskończonej długości fraktalną krzywą zwaną *smokiem Heighwaya*. Smoczą krzywą możemy więc traktować jako aproksymację smoka.

Teraz już jesteśmy gotowi do dowodu faktu, że smocza krzywa nie ma samoprzecięć. Dowód przytaczamy za Geraldem Edgarem [1]. Narysujmy krzywą  $S_n$  na kwadratowej siatce  $L_n$  o długości krawędzi  $(1/\sqrt{2})^n$ . Każdy odcinek krzywej pokrywa się z jedną krawędzią siatki. Ponadto pomalujmy kwadraty siatki  $L_n$  w „szachownicę” (rys. 4). Zauważmy, że gdy konstruujemy krzywą  $S_{n+1}$ , to rysujemy trójkąty naprzemiennie na kolorowych i białych kwadratach. Ponadto wszystkie trójkąty konstruowane na kolorowych polach pochodzą od odcinków  $S_n$  równoległych do jednej z osi siatki  $L_n$ , a trójkąty konstruowane na białych polach pochodzą od odcinków równoległych do drugiej osi.

Ponieważ w każdym wierzchołku siatki krzywa ma kąt prosty (który, być może, dotyka drugiego kąta prostego w tym wierzchołku), zatem aby uzyskać samoprzecięcie, któraś z krawędzi siatki musiałaby należeć do krzywej dwukrotnie jako jej odcinek. Załóżmy zatem, że w  $S_n$  nie ma takiego odcinka; pokażemy, że wynika z tego, iż w  $S_{n+1}$  również takiego nie ma. Niech  $P$  będzie dowolnym kwadratem w siatce  $L_n$ ,  $e$  – krawędzią siatki  $L_{n+1}$  wewnątrz  $P$ , a  $e_1$  i  $e_2$  – krawędziami siatki  $L_n$  o wspólnym wierzchołku z  $e$ . Krzywa  $S_n$  odwiedza każdą z krawędzi  $e_1, e_2$  co najwyżej raz, a krzywa  $S_{n+1}$  odwiedza krawędź  $e$  dokładnie raz dla każdego trójkąta skonstruowanego na  $e_1$  lub  $e_2$ . Ale ponieważ te dwie krawędzie są prostopadłe, wobec tego tylko na jednej z nich możemy zbudować trójkąt w kwadracie  $P$  – na tej, która jest kompatybilna z kolorem kwadratu  $P$ . To kończy dowód.

Równie ciekawy jest fakt następujący: jeśli narysujemy cztery nieskończone smocze krzywe mające swoje początki w tym samym punkcie, ale obrócone o wielokrotności  $90^\circ$ , to nie tylko nie będą się one ze sobą przecinać, ale, co więcej, pokryją całą płaszczyznę (tzn. każda jednostkowa krawędź siatki będzie należeć do jednej z krzywych; rys. 5). Dowód tego faktu jest trudniejszy – zainteresowanych Czytelników odsyłamy do artykułu Chandlera Davisa i Donalda Knutha [2], opisującego zaskakujące związki smoczyczych krzywych z systemami pozycyjnymi o podstawie zespolonej. Swoją drogą, Knuth, jako prawdziwy fan smoczej krzywej, ma w domu na ścianie krzywą  $S_9$  ułożoną z 986 własnoręcznie wypalonych ceramicznych kafelków.

Czytelnik, który zapoznał się z artykułem Krzysztofa Barańskiego w tym numerze, może pokusić się o obliczenie wymiaru fraktalnego smoka Heighwaya. Jak pokazaliśmy, smocza krzywa ma strukturę rekurencyjną: składa się z dwóch krzywych mniejszych rzędów. Tak więc na  $S_n$  składają się dwie kopie  $S_{n-1}$  przeskalowane o czynnik  $1/\sqrt{2}$ . Z tego wynika podobna własność smoka Heighwaya: jest on sumą dwóch swoich kopii o rozłącznych wnętrzach, przy podobieństwie o skali  $s = 1/\sqrt{2}$  (patrz okładka). To powoduje, że wymiar smoka  $w$  musi spełniać równanie  $2(1/\sqrt{2})^w = 1$ , zatem wynosi  $w = 2$ . Miłośników parkietarzy ucieszy zapewne fakt, że smokiem można pokryć płaszczyznę – i to na wiele sposobów!