

# Fraktale kwantowe

Daniel WÓJCIK\*

W wyniku edukacji szkolnej można nabrać przekonania, że świat pełen jest gładkich obiektów, dobrze opisywanych przez linie proste, płaszczyzny, koła, kule itd. Poprosiwszy kogoś o narysowanie typowego wykresu funkcji, zwykle otrzymamy wykres wielomianu lub złożenia najbardziej znanych funkcji gładkich. A jednak, ściśle rzecz biorąc, typowa funkcja nie jest nigdzie ciągła, typowa funkcja ciągła nie jest nigdzie różniczkowalna itd. Odkrycie to było szokiem dla wielu matematyków, którzy jeszcze niewiele ponad sto lat temu uważali, że wszystkie funkcje ciągłe są różniczkowalne (opinię tę do dziś podziela wielu studentów na egzaminach analizy matematycznej).

Podstawy analizy matematycznej uporządkowano w drugiej połowie XIX wieku i wtedy zaczęto odróżniać funkcje różniczkowalne od ciągłych. Naturalnie pojawiło się pytanie, czy istnieją ciągłe funkcje, które nie są nigdzie różniczkowalne. Pierwszą osobą, która rozważała ten problem, był prawdopodobnie Riemann. W 1861 r. postawił hipotezę, że funkcja

$$(1) \quad r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

jest ciągła, ale nieróżniczkowalna, jednak nie był w stanie tego udowodnić. W 1872 r. Weierstrass podał inną funkcję, noszącą dziś jego nazwisko,

$$(2) \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x \pi),$$

i udowodnił, że dla pewnych wartości  $a$  i  $b$  nie jest ona różniczkowalna dla żadnego  $x$ . Kolejny krok wykonał Godfrey Hardy (1877–1947), który udowodnił nieróżniczkowalność  $W(x)$  dla wszystkich wartości  $a, b$  spełniających warunki  $b > 1 > a > 0$ ,  $ab \geq 1$ . Dostarczył on również dowodu nieróżniczkowalności funkcji  $r(x)$  dla dowolnego niewymiernego  $x$ . Później pokazano, że  $r(x)$  jest różniczkowalna dla pewnych wymiernych wartości  $x$ .

Hardy nie tylko wykazał nieróżniczkowalność  $W(x)$ , ale też zmierzył ją: udowodnił mianowicie, że

$$(3) \quad \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\} \sim \delta^H,$$

gdzie

$$H = \frac{\ln(1/a)}{\ln b}.$$

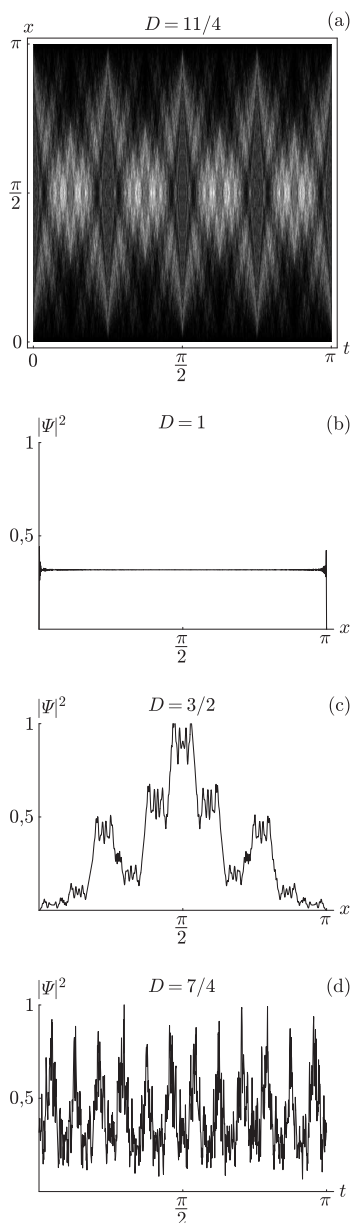
Korzystając z tego wyniku, można wykazać, że wymiar pudełkowy (opisany w artykule Krzysztofa Barańskiego) wykresu funkcji Weierstrassa  $W(x)$  wynosi

$$(4) \quad D_W = 2 + \frac{\ln a}{\ln b} = 2 - \left| \frac{\ln a}{\ln b} \right|.$$

Funkcje, których wykresy mają niecałkowity wymiar pudełkowy, nazywamy funkcjami fraktalnymi.

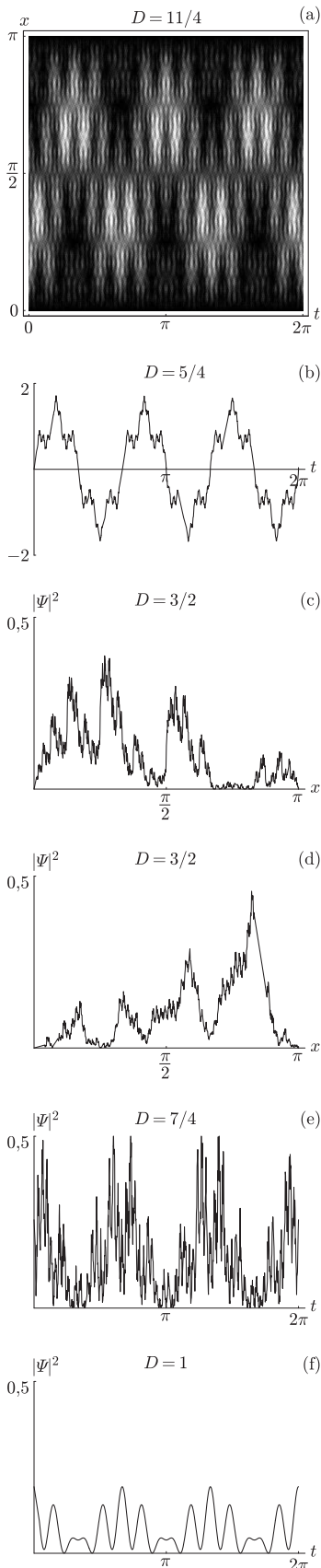
Czy jednak ma to cokolwiek wspólnego z opisem zjawisk w rzeczywistości? Okazuje się, że funkcje fraktalne mogą opisywać stany kwantowe prostych obiektów, np. cząstki w pudełku. Zanim to pokażemy, przypomnijmy podstawowe zasady mechaniki kwantowej. W mechanice klasycznej żeby opisać stan układu, musimy podać położenia i prędkości wszystkich jego elementów składowych. Jeżeli znamy wszystkie siły działające w układzie, możemy wyznaczyć jego przyszły stan, korzystając z praw Newtona, czyli rozwiązując równania ruchu. W mechanice kwantowej stan układu opisywany jest przez zespoloną funkcję falową  $\Psi(x, t)$ , której ewolucję opisuje równanie Schrödingera. Kwadrat modułu funkcji falowej,  $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ , jest gęstością prawdopodobieństwa zaobserwowania układu w danym punkcie  $x$  w chwili  $t$ .

Rozważmy jeden z najprostszych modeli fizycznych: poruszającą się w jednym wymiarze cząstkę o masie  $m$  w pudełku o nieskończenie sztywnych ściankach,



Rys. 1. (a) Fraktalny dywan kwantowy dla cząstki w pudełku, jaśniejszy odcień oznacza większą gęstość prawdopodobieństwa; (b) i (c) cięcia przestrzenne dywanu w  $t = 0$  i  $t = 1$ ; (d) cięcia czasowe w  $x = 1$ . Rysunki otrzymano, składając 200 początkowych składników we wzorze (9).

\*Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN



Rys. 2. (a) Fraktalny dywan kwantowy dla cząstki w pudełku; (b) średnia prędkość; (c) i (d) cięcia przestrzenne w  $t = 0$  i  $t = 1$ ; (e) i (f) cięcia czasowe w  $x = 1$  i  $x = \pi/8$ . Wykresy otrzymano, składając pierwsze 20 składników we wzorze (10) dla  $q = 2$ ,  $s = 3/2$ .

a więc układ mechaniczny z potencjałem  $V(x) = 0$  dla  $x \in [0, \pi]$ , poza tym  $V(x) = \infty$ . Wszystkie rozwiązania równania Schrödingera dla tego układu są postaci

$$(5) \quad \Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-in^2 t},$$

gdzie

$$(6) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin(nx) \Psi(x, 0).$$

W 1996 roku Michael Berry zauważył, że jeżeli w chwili  $t = 0$  wiemy o cząstce jedynie tyle, że jest ona gdzieś w pudełku, to wówczas jej stan początkowy możemy opisać funkcją falową,  $\Psi(x, 0) = \text{const}$  wewnątrz pudełka oraz  $\Psi(x, 0) = 0$  na zewnątrz. Wtedy gęstość prawdopodobieństwa  $\rho(x, t)$  znalezienia cząstki w punkcie  $x$  dla ustalonego czasu  $t > 0$  jest prawie zawsze funkcją fraktalną, której wykres ma wymiar  $D_x = D + 1/2 > 1$ , gdzie  $D$  jest wymiarem przestrzeni (u nas  $D = 1$ ). Z kolei, jeżeli ustalimy punkt  $x$  w przestrzeni, to prawie zawsze wykres gęstości prawdopodobieństwa w tym punkcie jest funkcją fraktalną o wymiarze pudełkowym  $D_t = 7/4$ .

W opisywanym przypadku funkcja falowa Berry'ego ma w chwili  $t = 0$  postać

$$(7) \quad \Psi_{\text{Berry}}(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Z równania (6) otrzymujemy

$$(8) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \sin nx \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{\pi\sqrt{\pi n}}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Zatem

$$(9) \quad \Psi_{\text{Berry}}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi\sqrt{\pi}(2k+1)} \sin((2k+1)x) e^{-i(2k+1)^2 t}.$$

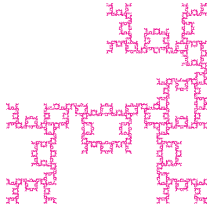
Dlaczego tak prosty stan początkowy staje się fraktalem podczas liniowej ewolucji zadanej równaniem Schrödingera? W istocie stan początkowy jest nieciągły na brzegu pudełka, co jest przyczyną omówionych wyżej fraktalnych własności stanu układu. Żeby złożyć funkcję stałą na odcinku z funkcji bazowych  $\sin(nx)$ , musimy wziąć ich nieskończenie wiele. Kiedy przybliżamy funkcję falową skończoną sumą sinusów, im bliżej brzegów, tym gorzej nam to wychodzi. Jest to tak zwany efekt Gibbsa, znany z analizy Fouriera. Ponieważ ewolucja kwantowa zmienia fazy każdej funkcji składowej proporcjonalnie do energii stanu, w każdej chwili  $t$  stan układu jest sumą nieskończonej liczby oscylacji o praktycznie losowych fazach, co prowadzi do fraktala. Okazuje się też, że energia stanu opisanego funkcją Berry'ego jest nieskończona.

Można tu zadać kilka pytań. Czy nieciągłość stanu początkowego jest koniecznym warunkiem fraktalności? Czy może raczej nieskończona energia? Czy wymiar fraktalny funkcji falowej jest zdeterminowany wymiarem przestrzeni? Okazuje się, że nieskończona energia stanu jest konieczna, żeby stan był „prawdziwym” fraktalem: funkcja falowa musi mieć składowe o dowolnie dużej energii (wysokiej częstości przestrzennej), żeby skalowanie występowało w najmniejszych skalach, a przy tym wagi składowych muszą być na tyle duże, żeby pochodna funkcji falowej nie była różniczkowalna. Natomiast można znaleźć fraktalne funkcje falowe wszędzie ciągle o dowolnym dozwolonym wymiarze fraktalnym. (Jasne jest, że wykres ciągłej rzeczywistej funkcji musi mieć wymiar nie mniejszy niż wymiar prostej, czyli 1, a nie może być większy niż wymiar przestrzeni, w której leży, czyli 2.)

Przykładową klasę funkcji falowych o zadanym wymiarze otrzymamy, biorąc dla cząstki w pudełku stan początkowy opisany funkcją Weierstrassa (2). Wówczas

$$(10) \quad \Psi_W(x, t) = N \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(s-2)} \sin(q^n x) e^{-iq^{2n} t},$$

gdzie  $q = 2, 3, \dots$ ,  $s \in (1, 2)$ , a  $N$  jest stałą normalizacji.



Funkcja (10) ma kilka ciekawych własności. Okazuje się, że jej część rzeczywista i urojona, a także kwadrat jej modułu, czyli gęstość prawdopodobieństwa, są funkcjami fraktalnymi. Dla dowolnego ustalonego czasu  $t$  wykres przestrzennej zależności funkcji  $\rho(x, t)$  jest fraktalem o wymiarze  $D_x = s$ . Dla prawie każdego ustalonego  $x \in [0, \pi]$  wykres funkcji  $\rho(x, t)$  jest fraktalem o wymiarze  $D_t(x) = 1 + s/2$ , ale dla gęstego, dyskretnego zbioru punktów  $x_d$ , funkcja  $\rho(x = x_d, t)$  jest gładka, a więc  $D_t(x_p) = 1$ . Wykres funkcji dwóch zmiennych  $\rho(x, t)$  jest fraktalem o wymiarze  $D_{xy} = 2 + s/2$ .

Dwuwymiarowe wykresy gęstości prawdopodobieństwa  $P(x, t)$  nazywamy fraktalnymi dywanami kwantowymi, w analogii do pojęcia dywanów kwantowych używanego w przeszłości. Na rysunku 2(a) pokazujemy typowy fraktalny dywan kwantowy (jaśniejsze obszary oznaczają większą gęstość prawdopodobieństwa) dla  $q = 2$ ,  $s = 3/2$  i jego cięcia w czasie i przestrzeni. Okresowość w czasie z okresem  $2\pi/3$ , którą widzimy na dywanie, wiąże się ze strukturą widma częstości  $\omega_{m,k} = 3(4^{m-1} + \dots + 4^{m-k})$ ,  $m = 1, \dots, \infty$ ,  $k = 1, \dots, m$ , fraktalnej gęstości prawdopodobieństwa  $\rho(x, t)$ . W punktach  $x_d = k\pi/q^m$  ( $k = 0, 1, \dots, q^m$ ) suma (10) ma tylko  $m$  składników, w związku z czym funkcja  $P_x(t)$  jest gładka ( $D_t = 1$ ). Przykład takiego zachowania pokazany jest na rysunku 2(f). Tak więc funkcja  $D_t(x)$  nie jest ciągła w żadnym punkcie  $x$  na przedziale  $[0, \pi]$ .

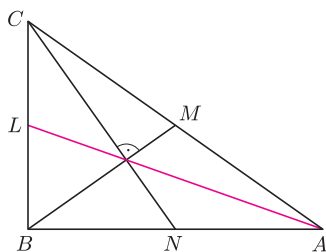
Oczywiście, żaden układ nie może mieć nieskończonej energii, co, między innymi, oznacza, że nie ma w przyrodzie „prawdziwych” fraktali, tak samo, jak nie ma idealnych okręgów, prostych itd. W praktyce mówimy o fraktalach „fizycznych”, mając na myśli obiekty, które w pewnym zakresie skali wykazują (statystyczne) samopodobieństwo. Ciekawe, że te fizyczne fraktale kwantowe, zdefiniowane jako skończone sumy składników w równaniu (10), zachowują swój charakter w czasie. Podobne rozwiązania można skonstruować dla całej klasy potencjałów wiążących cząstkę wystarczająco mocno (np. dla oscylatora harmonicznego).



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1318.** Znaleźć wszystkie takie liczby pierwsze  $k$ , że liczba  $2^k + k^2$  jest pierwsza. Rozwiązanie na str. 24

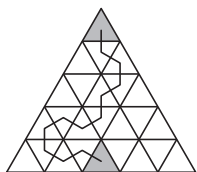


Rys. 1

**M 1319.** Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $B$  i boku  $BC$  długości 1. Punkty  $L$ ,  $M$  i  $N$  to odpowiednio środki boków  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  (rys. 1). Wiedząc, że proste  $BM$  i  $CN$  są prostopadłe, obliczyć długość odcinka  $AL$ .

Rozwiązanie na str. 3

**M 1320.** Trójkąt równoboczny o boku długości 2011 podzielono na jednostkowe trójkąty równoboczne, analogicznie do rysunku 2. Ile jest ścieżek prowadzących od trójkąta w górnym rzędzie do środkowego trójkąta w dolnym rzędzie, takich że kolejne trójkąty na ścieżce mają wspólny bok, a ścieżka nigdy nie wraca do góry (z rzędu niższego do wyższego) ani nie przechodzi dwa razy przez żaden trójkąt? Rozwiązanie na str. 2



Rys. 2

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 791.** Kuchenka elektryczna przystosowana do napięcia 220 V jest wyposażona w dwie spirale grzejne o oporach 60 i 120  $\Omega$ . Zaprojektować schemat połączeń pozwalających użytkować kuchenkę w trzech zakresach mocy: 400, 800 i 1200 W. Rozwiązanie na str. 23

**F 792.** Galwanometr o czułości  $3 \cdot 10^{-4}$  A i zakresie  $1,5 \cdot 10^{-2}$  A, wyposażony w opornik wewnętrzny 60  $\Omega$ , należy przekształcić w miernik uniwersalny (amperomierz o zakresach 100 mA i 5 A oraz woltomierz 10 V, 100 V i 1000 V). Zaproponować schemat połączeń i obliczyć parametry niezbędnych oporników. Rozwiązanie na str. 2