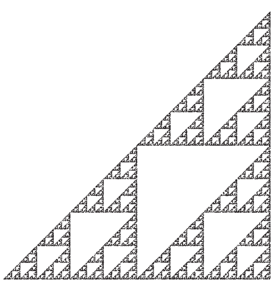
Wycinanki

Zróbmy razem kilka doświadczeń myślowych z użyciem kwadratowej kartki papieru i nożyczek. Doświadczenia będą bardzo proste, ale ich wynik – wycinanki (bo cóż by innego) – będą całkiem zaskakujące.

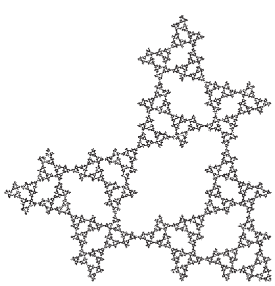
1. Wycinanie. W pierwszym kroku doświadczenia wytnijmy cokolwiek, np. lewą górną ćwiartkę kartki. To było proste, ale szybko dostrzegamy techniczny problem polegający na tym, że będziemy musieli decydować, co wyciąć w drugim kroku wycinania, i w następnym, i w następnym... Dobrze byłoby znaleźć jakąś metodę, dzięki której nie musielibyśmy podejmować decyzji i która uprościłaby całe doświadczenie. Usunięcie lewej górnej ćwiartki ma nieoczekiwanie pozytywne konsekwencje. Wszak pozostały nam w ręku trzy kwadratowe ćwiartki i możemy z nimi postąpić **podobnie** – usunąć z każdej z nich jej lewą górną ćwiartkę. To, co zostanie, będzie sumą większej już liczby „ćwiartek ćwiartek", z którymi – dzięki naszej metodzie – poradzimy sobie bez trudu. Na każdym kroku wycinania będziemy wiedzieli, co wyciąć, nawet jeśli zechcemy wykonać tych kroków nieskończenie wiele. To zaś nieuchronnie nastąpi – wszak przeprowadzamy doświadczenie myślowe.



Rysunek obok przedstawia dobre przybliżenie naszej pierwszej nieskończonej wycinanki. Przyglądając się mu uważnie, można dostrzec pewną własność nieskończonej wycinanki, której **nie mają** jej kolejne przybliżenia, a która jest konsekwencją wybranej metody wycinania. Skoro w trzech częściach wycinanki nasze nożyczki **pracowały podobnie** do tego, jak wycinały całą wycinankę, to każda z tych części **jest podobna** do całej wycinanki. To podobieństwo ma już jednak sens ściśle geometryczny, tzn.:

$$W = \phi_1(W) \cup \phi_2(W) \cup \phi_3(W),$$

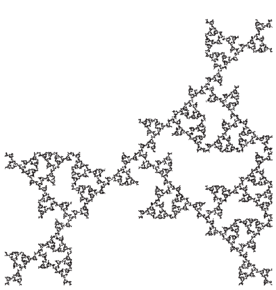
gdzie W jest wycinanką, a ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 to trzy podobieństwa (w tym przypadku jednokładności) przekształcające kwadrat w jego odpowiednie ćwiartki. Własność figury W, polegająca na tym, że jest ona sumą podobnych do siebie fragmentów, nazywa się **samopodobieństwem**.



Opanowawszy zdziwienie, że tak prosta procedura prowadzi do tak skomplikowanego kształtu, prawdziwy „doświadczalnik" znalazł już zapewne pole do dalszych doświadczeń. Kwadrat jest przecież podobny do swojej ćwiartki na 8 różnych sposobów. Każde z takich podobieństw jest złożeniem jednokładności o środku w wierzchołku kwadratu z jedną z ośmiu izometrii własnych kwadratu (czterech symetrii osiowych lub czterech obrotów).

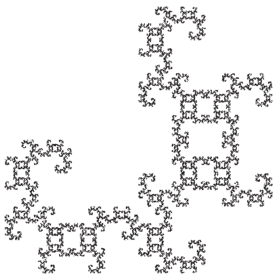
Czy, wybrawszy dowolny z $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ układów trzech podobieństw (ψ_1, ψ_2, ψ_3) przekształcających kwadrat w trzy ustalone ćwiartki, można tak „zaprogramować" nożyczki, żeby wycinanka W była sumą swoich kopii, czyli

$$W = \psi_1(W) \cup \psi_2(W) \cup \psi_3(W)?$$



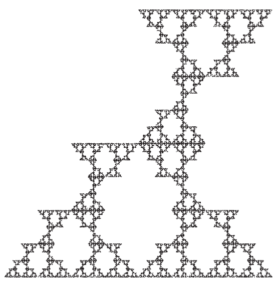
Pozytywnej (ale i znacznie ogólniejszej) odpowiedzi na to pytanie dostarcza twierdzenie Hutchinsona z 1982 roku, o którym pisze dokładniej Przemysław Kiciak w artykule *Układy iterowanych przekształceń.*

Czy – pytając dalej – wszystkie tak powstałe wycinanki będą istotnie różne (tzn. nieizometryczne)? Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta. Wskazówką niech będzie przykład wycinanki, która jest samopodobna na przynajmniej

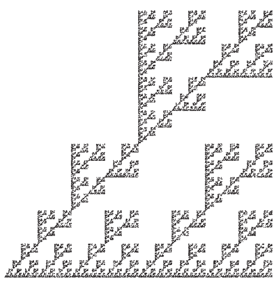


4096 sposobów. Wystarczy w pierwszym kroku wyciąć „nic”, by następnie z każdą z czterech pozostałych ćwiartek postąpić podobnie (na 8 różnych sposobów) i powtórzyć tę czynność (dla porządku jedynie) nieskończenie wiele razy.

Na marginesach (nie tylko tego artykułu) prezentujemy niektóre spośród 512 wycinanek powstałych w opisany powyżej sposób. Nie zawsze łatwo zgadnąć, jakich podobieństw użyto do ich wykonania. Jeśli ktoś to zrobi bez użycia linijki, to na pewno ma doskonale wygimnastykowane oko. Album z kompletem wycinanek można obejrzeć na naszej stronie `deltami.edu.pl`.



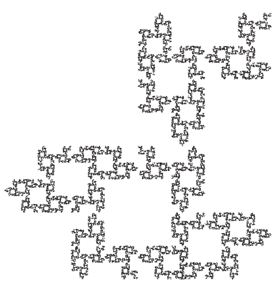
2. Pomiary. W każdym doświadczeniu, nawet myślowym, powinno się dokonać jakichś pomiarów. Spróbujmy zatem zmierzyć wycinanki. W zasięgu ręki mamy linijkę (przyrząd do mierzenia długości) i przyrząd do mierzenia pola powierzchni. Niestety, szybko okazuje się, że nasza wycinanka ma nieskończoną długość – wystarczy dodać długości wszystkich odcinków w niej zawartych. Równie szybko dochodzimy do wniosku, że wycinanka ma zerowe pole – wystarczy dodać pola wycinanych ćwiartek i porównać z polem kartki, od której zaczynaliśmy. Mamy również nieodparte wrażenie, że nasze wycinanki są w pewnym sensie bardziej skomplikowane niż typowe figury dodatniej długości i mniejsze niż figury o dodatnim polu.



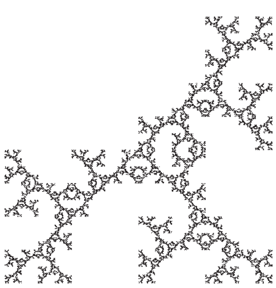
Intuicja podpowiada nam, że użyliśmy niewłaściwych przyrządów – tak, jak to się czasem dzieje w życiu codziennym, np. wtedy, gdy próbujemy się zważyć na wadze aptekarskiej lub na wadze do ważenia parowozów. Jeden z przyrządów jest za czuły, a drugi w ogóle nie reaguje.

Czy istnieje przyrząd pomiarowy odpowiedni dla wycinanek?

Posługując się jedynie intuicją, szybko pokażemy, jak powinien ów przyrząd wyglądać (jeśli istnieje, oczywiście). Zauważmy najpierw, że zarówno długość, jak i pole mają coś wspólnego z wymiarem topologicznym. Dodatnią długość miewają figury 1-wymiarowe (ich pole jest na pewno zerowe), a dodatnie pole miewają figury 2-wymiarowe (ich długość jest na pewno nieskończona). Szukamy takiej miary, która przy próbie zmierzenia wycinanki dawałaby wynik dodatni – jej „czułość” s powinna być pomiędzy 1 a 2, tzn. pomiary tą miarą figur 1-wymiarowych powinny dawać wynik 0, a figur 2-wymiarowych ∞. Oznaczmy tę hipotetyczną miarę przez $\mathcal{H}_s$.

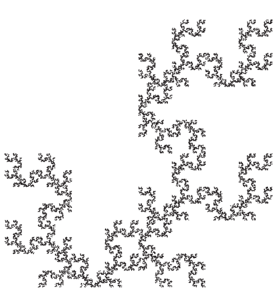


W konstrukcji naszej wycinanki główną rolę odgrywały podobieństwa. Wiemy, że długość zmienia się proporcjonalnie do pierwszej potęgi skali podobieństwa, a pole – do jej kwadratu. Możemy więc oczekiwać, że nasza hipotetyczna miara $\mathcal{H}_s$ będzie się zmieniać proporcjonalnie do skali podobieństwa w potędze s. Jeśli zatem istnieje właściwa miara o czułości $s \in (1,2)$, która dla naszej wycinanki przyjmuje wartość dodatnią, a ponadto przy podobieństwach zmienia się w sposób analogiczny do długości i pola przekształcanych figur, to



$$\begin{aligned}\mathcal{H}_s(W) = \mathcal{H}_s(\phi_1(W) \cup \phi_2(W) \cup \phi_3(W)) = \\ = \mathcal{H}_s(\phi_1(W)) + \mathcal{H}_s(\phi_2(W)) + \mathcal{H}_s(\phi_3(W)) = \\ = \left(\tfrac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W) = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^s \mathcal{H}_s(W),\end{aligned}$$

czyli (skoro przyjęliśmy, że $0 < \mathcal{H}_s(W) < \infty$) parametr s musi spełniać równanie $3 = 2^s$ i ostatecznie $s = (\log 3)/(\log 2) \approx 1{,}585$. Ten wynik doskonale potwierdzałby naszą intuicję, że Świat (przynajmniej wycinanek) nie jest całkiem bez sensu. Potwierdzałby, gdyby miara $\mathcal{H}_s$ rzeczywiście istniała...



3. Na zakończenie. Miary $\mathcal{H}_s$ dla $s > 0$ istnieją i noszą nazwę **miar Hausdorffa** (patrz też artykuł Krzysztofa Barańskiego). Parametr s, który roboczo nazywaliśmy czułością miary, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**. Jeśli dla pewnej figury W i liczby $s > 0$ oraz takich dowolnych liczb a, b, że $0 < a < s < b$, mamy $\mathcal{H}_a(W) = \infty$ oraz $\mathcal{H}_b(W) = 0$, to mówimy, że figura W ma wymiar Hausdorffa s. Jeśli wymiar Hausdorffa figury W jest różny od jej wymiaru topologicznego, to W jest **fraktalem**. Każda z 512 naszych wycinanek jest fraktalem o wymiarze Hausdorffa równym $(\log 3)/(\log 2) \approx 1{,}585$.

Dziwne to uczucie wiedzieć, że nie mówimy prozą...

Małą Deltę przygotował Krzysztof RUDNIK