Warto dobrze ustawić

Joanna JASZUŃSKA

W niektórych zadaniach geometrycznych (i nie tylko) warto dobrze coś ustawić, aby łatwiej rozwiązać problem. Poniżej podaję szereg tego rodzaju przykładów. Większość z nich można rozwiązać „zwyczajnie", ale jest to droga często bardziej pracochłonna, a nawet żmudna. Odpowiednie, czasem nietypowe ustawienie danej figury lub bryły pozwala znaleźć rozwiązanie krótsze i bardziej pomysłowe. Ocenę, czy także ładniejsze, pozostawiam Czytelnikowi.

Nawias kwadratowy oznacza pole figury.

1. Oblicz wysokość h z wierzchołka C na podstawę AB w trójkącie ABC, mając dane $AB = BC = 5$ i $AC = 6$.

2. Ramiona AC i BC trójkąta równoramiennego ABC mają długość 1. Dla jakiej podstawy AB pole tego trójkąta jest maksymalne?

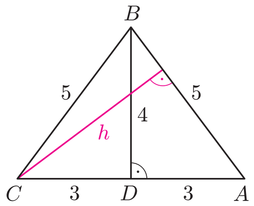
3. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ i $\sqrt{26}$.

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach C i E są proste. Oblicz $[ABCDE]$, jeśli $AB = CD = DE = 1$ oraz $BC = x$, $AE = 1 - x$ dla $0 < x < 1$.

5. Dany jest ostrosłup trójkątny $ABCS$. Krawędzie podstawy mają długości $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = CA = 5$. Krawędzie boczne mają długości $AS = BS = 3$, $CS = 4$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

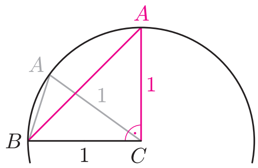
6. Oblicz odległość pomiędzy środkami przeciwległych krawędzi czworościanu foremnego o krawędzi 1.

Rozwiązania



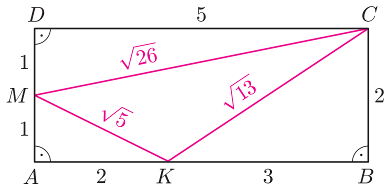
Rys. 1

R1. Ustawmy trójkąt tak, by AC było podstawą, i niech D będzie spodkiem wysokości z wierzchołka B (rys. 1). Wtedy $AD = DC = 3$ oraz $BD = 4$, zatem $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Ponieważ jednocześnie $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$, to $h = 24/5$. $\square$



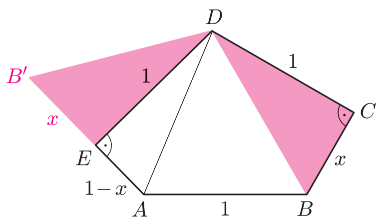
Rys. 2

R2. Ustawmy trójkąt tak, by BC było podstawą. Wtedy wierzchołek A leży na okręgu o środku C i promieniu 1 (rys. 2). Pole trójkąta jest maksymalne, gdy wysokość z A jest maksymalna (bo podstawa BC ma ustaloną długość 1), czyli gdy wysokość ta jest równa 1. Zachodzi to dla $\sphericalangle BCA = 90°$, czyli dla $AB = \sqrt{2}$. $\square$



Rys. 3

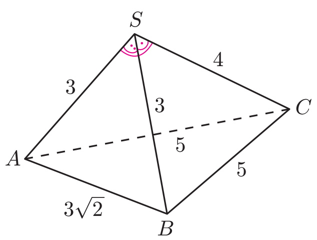
R3. Rozważmy prostokąt $ABCD$ o bokach $AB = 5$ i $BC = 2$. Niech punkt M będzie środkiem boku DA, a punkt K niech należy do boku AB, przy czym $AK = 2$, $KB = 3$ (rys. 3). Wtedy z twierdzenia Pitagorasa $MK = \sqrt{5}$, $KC = \sqrt{13}$, $CM = \sqrt{26}$. Należy obliczyć pole trójkąta MKC. Jest ono równe $[ABCD] - [AKM] - [BCK] - [CDM] = 10 - 1 - 3 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$. $\square$



Rys. 4

R4. Ustawmy trójkąt BCD obok trójkąta DEA, jak na rysunku 4 (B' oznacza odpowiednik wierzchołka B). Wtedy w trójkącie ADB' podstawa AB' ma długość $1 - x + x = 1$, wysokość DE jest równa 1, więc pole jest równe $1/2$.

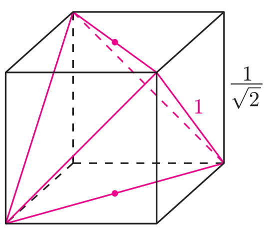
Pozostałą częścią pięciokąta jest trójkąt ADB. Przystaje on do trójkąta ADB', ponieważ $AB = 1 = AB'$, $DB = DB'$ oraz bok AD jest wspólny. Stąd $[ADB] = [ADB'] = 1/2$, więc pole pięciokąta równe jest 1. $\square$



Rys. 5

R5. Ściana ASC jest trójkątem o bokach długości $3, 4, 5$, ma zatem kąt prosty przy wierzchołku S (rys. 5). Analogicznie $\sphericalangle BSC = 90°$. Ściana ASB ma boki długości $3, 3, 3\sqrt{2}$, czyli jest połówką kwadratu o boku 3, więc też ma kąt prosty przy S.

Ustawmy dany ostrosłup inaczej: niech ASB będzie podstawą. Wobec powyższych obserwacji CS jest wtedy wysokością i $[ASB] = 9/2$. Stąd objętość ostrosłupa to $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 4 = 6$. $\square$



Rys. 6

R6. Ustawmy czworościan na krawędzi i rozważmy sześcian, którego czterema wierzchołkami są wierzchołki tego czworościanu (rys. 6). Każda z krawędzi czworościanu jest przekątną pewnej ściany sześcianu, zatem krawędź sześcianu ma długość $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Środki przeciwległych krawędzi czworościanu są środkami przeciwległych ścian sześcianu, więc ich odległość równa jest długości krawędzi sześcianu. $\square$