Sztuka anamorficzna

Michał BUDZYŃSKI[*], *Maria SZOSTAK*[*]

Obrazem anamorficznym nazywamy obraz powstały przez celowe zniekształcenie jego proporcji w taki sposób, aby jego poprawny odczyt był możliwy przez popatrzenie na niego z ustalonej perspektywy lub odbicie go w odpowiednim zwierciadle. Takie specjalne lustro nazywane jest anamorfoskopem i może nim być np. lustrzany cylinder, lustrzany stożek czy też zwyczajna łyżka. Dziedzina, która zajmuje się tworzeniem takich obrazów, nazywa się sztuką anamorficzną. Termin ten powszechnie nie jest znany, lecz to, co się kryje pod jego nazwą, obserwujemy praktycznie na co dzień. Współczesne anamorfozy mają często charakter atrakcji turystycznych, ale także ozdobny, a przede wszystkim praktyczny.

Rys. 1

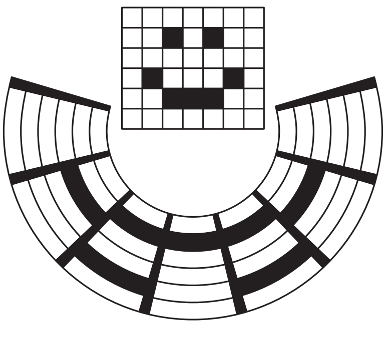
Obrazy anamorficzne można zobaczyć w wielu miejscach. Aby się o tym przekonać, wystarczy przyjrzeć się chociażby poziomym znakom drogowym namalowanym na ulicach. Nietrudno zauważyć, że większość z nich jest nieproporcjonalnie rozciągnięta lub pogrubiona. Zabieg ten jest celowo stosowany przez projektantów, aby kierowcy jadący samochodem widzieli znaki we właściwych proporcjach. Obok przedstawiony został znak P-8c, czyli strzałka kierunkowa do skrętu w lewo.

W wielu miastach na świecie, np. Paryżu, Berlinie, Dun Laoghaire, można podziwiać wykorzystujące anamorfozę niesamowite malowidła na chodnikach, budynkach. Budzą one ogromne zainteresowanie wśród przechodniów.

Właściwości obrazu anamorficznego wykorzystywane są także w kinematografii, przy kręceniu filmów panoramicznych oraz nagrywaniu DVD. Podczas filmowania używane są kamery ze specjalnym anamorficznym obiektywem, który powoduje poziome „ściśnięcie” obrazu (ok. dwukrotne), a następnie w kinie do projektora zakładana jest odpowiednia anamorficzna soczewka, która rozciąga wyświetlany obraz. Dzięki takiej metodzie wykorzystywana jest cała dostępna powierzchnia taśmy filmowej, a w konsekwencji zapewniona jest największa możliwa rozdzielczość.

Pomysł ten przeniesiony został również na DVD z pewną różnicą – tutaj rolę obiektywu anamorficznego pełni elektronika odtwarzacza DVD. W tym przypadku rejestrowany obraz jest kompresowany do proporcji $4:3$. Jeśli odbiornik telewizyjny wyposażony jest w odpowiednią opcję, obraz jest dekompresowany i transformowany do formatu $16:9$. W przeciwnym przypadku następuje redukcja liczby linii obrazu poprzez zmniejszenie jego wysokości oraz dodanie u góry i z dołu czarnych pasów na wyświetlanym obrazie.

W malarstwie najbardziej znanym przykładem zastosowania anamorfozy jest dzieło namalowane w XVI wieku przez Hansa Holbeina Młodszego, noszące tytuł *Ambasadorowie*. Można je było zobaczyć w zapowiedzi tego artykułu w poprzednim numerze *Delty*. Jest ono także na naszej stronie `deltami.edu.pl`. Poza przedstawionymi postaciami oraz licznymi detalami o bogatej symbolice uwagę skupia podłużny, ukośny kształt w dolnej części obrazu. Z pozoru nic nieprzypominająca smuga okazuje się ludzką czaszką. Aby się o tym przekonać, wystarczy punkt obserwacji umieścić nad obrazem (pod kątem ok. $30°$) na drodze wiodącej w kierunku wyznaczonym przez tę deformację. Co ciekawe, Czytelnik może spróbować zobaczyć czaszkę na uwypukleniu łyżki.

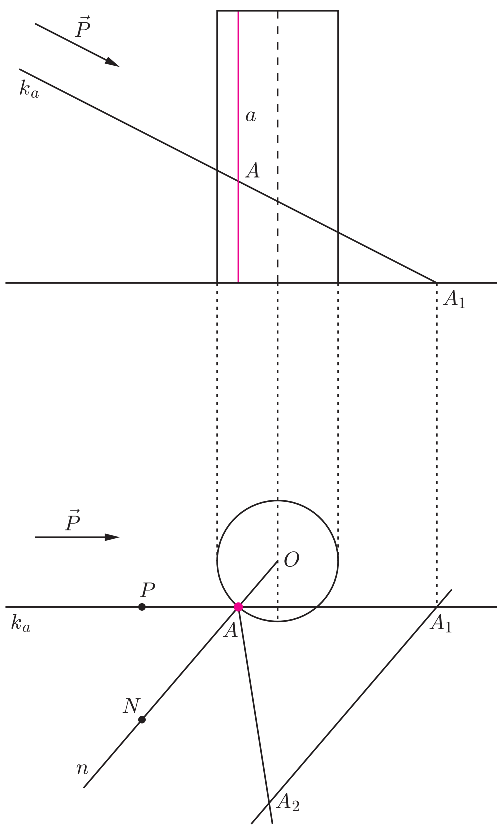


Rys. 2. Przykładowa siatka dla lustrzanego cylindra.

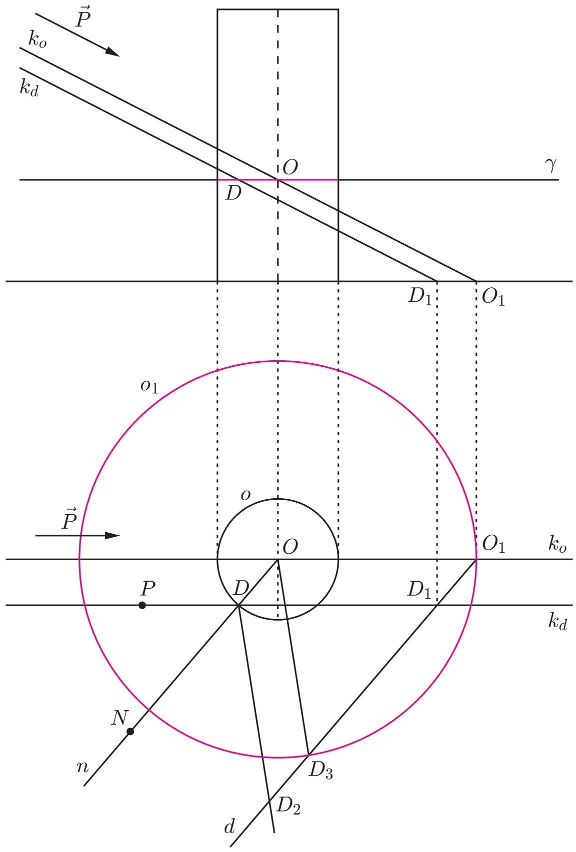
Metoda, przy użyciu której wykonuje się tego rodzaju obrazy anamorficzne, jest, oczywiście, zwykłym rzutowaniem perspektywicznym, w związku z czym do poprawnego odczytania nie trzeba dysponować żadnym specjalnym zwierciadłem.

Sytuacja jednak znacznie się komplikuje, gdy obraz anamorficzny chcemy uzyskać przez odbicie w lustrzanym cylindrze. Na przestrzeni wieków ludzie próbowali w różny sposób radzić sobie z tym problemem. Za każdym razem myślą przewodnią było stworzenie odpowiedniej siatki kołowej (rys. 2).

[*]studenci, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 3. Schemat odbicia tworzącej walca, górna część: rzut z boku, dolna: rzut z góry.



Rys. 4. Schemat odbicia okręgu leżącego w przekroju poprzecznym walca, górna część: rzut z boku, dolna: rzut z góry.

Idea ta polegała na tym, aby najpierw podzielić dany obraz w szachownicę, a następnie w pewien intuicyjny sposób narysować obraz anamorficzny zawartości oczek takiej siatki. Dzięki takiemu zabiegowi problem redukował się do malowania oddzielnie małych fragmentów anamorficznych w każdym polu. Przez długi czas nie umiano jednak wyznaczyć dokładnego obrazu anamorficznego wybranego punktu, a w konsekwencji również precyzyjnej siatki kołowej. Z czasem jednak udało się znaleźć rozwiązanie tego problemu.

Zakładamy, że obserwator (oko) jest dostatecznie daleko od lustrzanego cylindra, a obraz anamorficzny jest wyznaczony przez promienie równoległe do danego wektora $\vec{P}$, nie zaś przez jeden środek rzutów. Znalezienie siatki kołowej sprowadza się do wyznaczenia obrazu anamorficznego dwóch szczególnych krzywych leżących na walcu – tworzącej walca oraz okręgu leżącego w jego przekroju poprzecznym. Najpierw znajdziemy obraz tworzącej walca. Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku 3. Niech wektor $\vec{P}$ oznacza kierunek rzutowania, natomiast a tworzącą walca. Na początku wyznaczymy obraz dowolnego punktu $A \in a$, rozwiązując przy okazji podstawowy problem, z którym dawniej nie mogli uporać się malarze. W tym celu poprowadźmy prostą k_a równoległą do kierunku rzutowania, przechodzącą przez punkt A. Korzystając z górnej części rysunku 3, przedstawiającej rzut walca z boku, wyznaczamy punkt A_1 będący punktem przecięcia prostej k_a oraz płaszczyzny rzutowania. Przez A_2 oznaczmy szukany obraz anamorficzny punktu A.

Spójrzmy teraz na dolną część rysunku 3 przedstawiającą rzut walca z góry. Zauważmy, że w rzucie prostokątnym mamy równość odcinków $AA_1 = AA_2$. Oznaczmy teraz przez n prostą prostopadłą do powierzchni walca przechodzącą przez punkt A. Zgodnie z prawem fizycznym mówiącym, że kąt padania jest równy kątowi odbicia, mamy równość kątów: $\sphericalangle PAN = \sphericalangle NAA_2$. Ponadto z równości kątów wierzchołkowych wynika, że $\sphericalangle OAA_1 = \sphericalangle NAA_2$. W związku z tym również kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego A_1AA_2 mają tę samą miarę. Z tego z kolei wynika równoległość prostych n i A_1A_2. Obierając inny punkt na prostej a – oznaczmy go B – i postępując analogicznie, otrzymamy punkty B_1 i B_2, przy czym (wobec tego, że prosta n będzie ta sama) trójkąty AA_1A_2 i BB_1B_2 będą podobne. Zatem obrazem anamorficznym tworzącej a będzie półprosta AA_2 o wierzchołku w punkcie A.

Zastanówmy się teraz, jaki będzie obraz anamorficzny okręgu o wyznaczonego przez przekrój walca płaszczyzną γ. Przyjmijmy, że promień walca jest równy r, natomiast punkt O należy jednocześnie do osi walca i płaszczyzny γ. Wówczas O jest środkiem okręgu o, a r jego promieniem. Niech D będzie dowolnym punktem okręgu o. Poprowadźmy (rys. 4) dwie proste równoległe do kierunku rzutowania – k_o oraz k_d – przechodzące odpowiednio przez punkty O oraz D. Oznaczmy przez O_1 oraz D_1 punkty przecięcia tych prostych z płaszczyzną rzutowania, natomiast przez D_2 szukany obraz anamorficzny punktu D. W obrazie rzutu prostopadłego zachodzi, oczywiście, równość odcinków $DD_1 = DD_2$. Dodatkowo, podobnie jak w poprzednim przypadku, korzystając z prawa odbicia, otrzymujemy równość kątów PDN i NDD_2, która pociąga za sobą następującą równość: $\sphericalangle NDD_2 = \sphericalangle ODD_1 = \sphericalangle DD_1D_2 = \sphericalangle OO_1D_1$. Zatem punkty O_1, D_1 i D_2 są współliniowe. Rozważmy teraz okrąg

o środku O przechodzący przez O_1. Oznaczmy przez D_3 punkt przecięcia prostej d z okręgiem o_1. Wówczas czworokąt ODD_2D_3 jest równoległobokiem o bokach równych co do długości promieniom okręgów o oraz o_1.
Z przeprowadzonej analizy wynika, że obraz anamorficzny punktu D leży na prostej przechodzącej przez punkty O_1 oraz D_1, a ponadto znajduje się w odległości r od drugiego punktu przecięcia tej prostej z okręgiem o_1. W celu wyznaczenia obrazu anamorficznego okręgu o wystarczy zatem poprowadzić półproste z punktu O_1, a następnie wyznaczyć na nich punkty odległe o r od punktów ich przecięcia z okręgiem o_1. Krzywa, jaką otrzymamy w wyniku takiego procesu, nosi nazwę ślimaka Pascala.

Ślimak Pascala to szczególny rodzaj konchoidy okręgu. *Konchoida* krzywej Φ o *biegunie* B i *promieniu* a to zbiór punktów leżacych na dowolnej z prostych przechodzących przez B i odległych o a od jej przecięcia z Φ. Ślimak Pascala to taka szczególna konchoida okręgu, której biegun leży na tym okręgu.

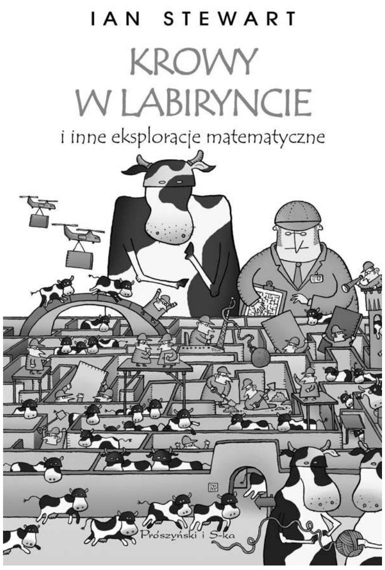
$Ko\nu\chi\varepsilon$ (konche) to po grecku muszla – stąd pochodzi nazwa ślimaka Pascala. Jest on krzywą stopnia 4; jeśli okrąg o promieniu r umieścimy tak, by miał równanie $(x-r)^2+y^2=r^2$, jego konchoida o biegunie $(0,0)$ i promieniu a będzie miała równanie

$$(x^2+y^2-2rx)^2-a^2(x^2+y^2)=0.$$

Na rysunkach mamy ślimaki, dla których a jest równe, odpowiednio, $r/2$, r, $3r/2$, $2r$, $5r/2$; czwarta z nich ma osobną nazwę – to *kardioida*.

Jak się zatem okazuje, krzywa będąca obrazem anamorficznym okręgu leżącego w przekroju poprzecznym walca nie jest łatwa do określenia na pierwszy rzut oka. Nie ma się zatem co dziwić malarzom, którzy przez długi czas mieli problemy z wyznaczeniem dokładnej siatki kołowej. Z czasem udało się również zbudować urządzenie mechaniczne (przypominające swym wyglądem wielonogi cyrkiel) służące do wykreślania tego typu siatek, które jednak w dobie grafiki komputerowej chyba znacznie traci na wartości. W szczególności dostępne są darmowe programy generujące obrazy anamorficzne w przekształceniu walcowym dowolnego zdjęcia. Przykładem takiego programu jest *Anamorph Me!*. Wiele niezwykłych obrazów grafiki anamorficznej Czytelnik może znaleźć bez trudu w Internecie pod hasłem *anamorphic art*.

Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne



Tytułowa książka Iana Stewarta to kolejny – po *Histeriach matematycznych* i dostępnej tylko w języku angielskim pozycji *How to Cut a Cake* – zbiorek felietonów tego światowej klasy matematyka i popularyzatora matematyki. W kilkunastostronicowych esejach pisanych swobodnym językiem autor przedstawia różne ciekawe (i często nietypowe) zagadnienia matematyczne, przy czym samą matematykę traktuje jako naukę *poważną*, choć niekoniecznie *podniosłą*. Czytelnik znajdzie tu więc zabawy (a nawet tańce!) ze sznurkami i węzłami, analizę gry w kości oraz gry Hex (uwaga: obie gry bardzo wciągające!), próbę ustalenia kształtu łzy, łamigłówki związane ze skoczkiem na szachownicy i kwadratami magicznymi, wreszcie tytułowy labirynt z krowami, czyli grę planszową zbudowaną z wykorzystaniem logicznej samozwrotności. W tej pozornie błahej tematyce kryją się nierzadko niebanalne fakty matematyczne.

Inną grupę tekstów stanowią zaskakujące zastosowania metod i pojęć matematycznych: w zoologii – badanie sposobów poruszania się zwierząt, w sztuce rzeźbiarskiej wykorzystującej fizyczne właściwości cementu, a nawet w przesłuchaniach na sali sądowej. Za pomocą takich przykładów autor potwierdza postawioną na wstępie tezę, że *nasza cywilizacja nie mogłaby funkcjonować bez matematyki.*

Na kartach książki jedynie sporadycznie znajdziemy gotowe rozwiązania postawionych problemów. Autor zachęca raczej do próby samodzielnego zrozumienia opisanych własności, do stawiania kolejnych pytań oraz przeprowadzania eksperymentów. Dzięki temu czytelnik ma szansę przekonać się osobiście, że *matematyka to niezła zabawa.*

Ian Stewart, *Krowy w labiryncie i inne eksploracje matematyczne*, przełożyła Agnieszka Sobolewska, wyd. Prószyński i S-ka, 2011.

A dla ciekawych tego, co nas czeka w kolejnych latach, jest cykl trzech felietonów pt. *Podróż do przyszłości...*

J. R.