



W zawodach II stopnia LXII Olimpiady Matematycznej wzięło udział 599 uczniów z całej Polski. Spośród nich do finału zakwalifikowano 139 osób. Oto jeden z problemów, z którymi przyszło im się zmierzyć:

**Zadanie 4.** Punkty  $A, B, C, D, E, F$  leżą w tej kolejności na półokręgu o środku  $O$ , przy czym  $AD = BE = CF$ . Cięciwa  $BE$  przecina cięciwy  $AD$  i  $CF$  odpowiednio w punktach  $G$  i  $H$ . Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

Jedną z metod używanych do dowodu tej równości było obrócenie układu punktów  $A, B, C$  i  $D$  o kąt  $\sphericalangle AOC$  wokół środka  $O$  i stąd wnioskowanie o kątach. Przedstawimy jedno z najładniejszych rozwiązań tego typu. Opiera się ono na pracy ucznia Krzysztofa Kleintera z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

**Rozwiązanie.** Bez straty ogólności możemy założyć, że promień danego okręgu wynosi 1. Będziemy używać łukowych miar kątów, tzn.  $\sphericalangle XOY$  ma miarę równą długości łuku  $\widehat{XOY}$ . Ponieważ  $AD = BE = CF$ , więc  $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOE = \sphericalangle COF$ . W takim razie

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE - \sphericalangle BOD = \sphericalangle DOE.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF \quad \text{i} \quad \sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF.$$

Oznaczmy, jak na rysunku,  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE = \alpha$  oraz  $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = \beta$ . Mamy wtedy

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF = \alpha + \beta.$$

Obróćmy płaszczyznę o kąt  $\varphi = \alpha + \beta$  wokół punktu  $O$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara i oznaczmy obraz dowolnego punktu  $X$  przez  $X'$ . W szczególności mamy  $A' = C$  i  $D' = F$ . Punkt  $E'$  leży na okręgu, choć – być może – poza danym półokręgiem. Mamy wtedy następujące równości kątów:

$$\sphericalangle COB' = \sphericalangle A'OB' = \sphericalangle DOE = \sphericalangle D'OE' = \sphericalangle FOE' = \alpha.$$

Oznaczmy przez  $l_{XY}$  prostą zawierającą punkty  $X$  i  $Y$ . Ponieważ  $G \in l_{AD} \cap l_{BE}$ , więc  $G' \in l_{A'D'} \cap l_{B'E'} = l_{CF} \cap l_{B'E'}$ . Zauważmy teraz, że ośmiokąt  $OE'FEDB'CBO$  jest przystający do figury  $OABCB'DEFO$ . Istnieje zatem izometria płaszczyzny przekształcająca punkty  $O, E', F, E, D, B', C$  i  $B$  odpowiednio na punkty  $O, A, B, C, B', D, E$  i  $F$ . Zatem obrazem prostej  $l_{B'E'}$  jest prosta  $l_{AD}$ , prostą  $l_{D'A'} = l_{FC}$  – prostą  $l_{BE}$ , a prostą  $l_{BE}$  – prostą  $l_{FC}$ .

W takim razie: punkt  $G' \in l_{B'E'} \cap l_{D'A'} = l_{B'E'} \cap l_{FC}$  przechodzi na  $G \in l_{DA} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$ , a punkt  $H \in l_{A'D'} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$  na siebie.

Stąd wynika równość  $\sphericalangle G'OH = \sphericalangle GOH$ , a z niej:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle GOG' = 2\sphericalangle GOH,$$

czego chcieliśmy dowieść.

**Uwaga.** Izometria, o której mowa w rozwiązaniu, to symetria względem prostej  $OH$ , bo jest to złożenie obrotu o kąt  $\alpha$ , przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wokół punktu  $O$ , z symetrią osiową względem prostej  $OH$  i jeszcze raz z tym samym obrotem.

Andrzej FRYSZKOWSKI