Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 607 ($WT = 2{,}59$) i 608 ($WT = 1{,}07$) z numeru 10/2010

Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Jerzy Cisło	Wrocław	40,66
Michał Kieza	Warszawa	38,62

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 623, 624

Redaguje Marcin E. KUCZMA

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \ldots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f, ciągłą na przedziale $\langle 0; b)$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geqslant f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b)$?

Zadanie 624 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2011

Przypominamy treść zadań:

615. Każdemu podzbiorowi B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze B (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

616. Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich x, y, z:
$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geqslant 6.$$

615. Oznaczmy szukaną wartość przez b_n. Weźmy pod uwagę wszystkie te podzbiory B zbioru $\{1, \ldots, n\}$, które nie zawierają żadnej pary liczb kolejnych i do których nie należy liczba n. Są to więc podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$; suma kwadratów uzyskanych *dla nich* liczb $p(B)$ wynosi b_{n-1}.

Z kolei zbiory B (bez pary liczb kolejnych), do których liczba n należy, traktujemy jak podzbiory zbioru $\{1, \ldots, n-2\}$, z dołączonym elementem n; suma kwadratów uzyskanych *dla nich* liczb $p(B)$ wynosi $n^2 b_{n-2}$.

Dostajemy wzór rekurencyjny $b_n = b_{n-1} + n^2 b_{n-2}$, który z wartościami początkowymi $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ prowadzi przez łatwą indukcję do wyniku w jawnej postaci: $b_n = (n+1)!$.

616. Po pomnożeniu przez wspólny mianownik dostajemy do dowodu nierówność $L \geqslant P$, gdzie
$$\begin{aligned} L = {} & (y+z)^2(y^2+zx)(z^2+xy) + \\ & + (z+x)^2(z^2+xy)(x^2+yz) + \\ & + (x+y)^2(x^2+yz)(y^2+zx), \end{aligned}$$
$$P = 6(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

Teza wynika natychmiast z tożsamości
$$\begin{aligned} L - P = {} & yz(y^2-z^2)^2 + zx(z^2-x^2)^2 + xy(x^2-y^2)^2 + \\ & + (y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2, \end{aligned}$$
którą nietrudno sprawdzić, otwierając nawiasy i wykonując wskazane działania.

To już całe rozwiązanie – ta zmyślna tożsamość zaiste trywializuje problem, a jej sprawdzenie jest czynnością czysto mechaniczną (*Mathematica* robi to w ułamku sekundy; ręcznie sprawdzamy ją w parę minut). Ale jak na nią wpaść?!

Na przykład tak: dla $x = z$ różnica $L - P$ przyjmuje wartość $2yz(y^2 - z^2)^2$; analogicznie dla $x = y$ i dla $y = z$. Zatem przyjmując
$$F(x, y, z) = yz(y^2-z^2)^2 + zx(z^2-x^2)^2 + xy(x^2-y^2)^2,$$
widzimy, że wielomian $(L - P) - F$ ma wartość zero, gdy dowolne dwie zmienne są równe. Jest więc podzielny przez wielomian
$$G(x, y, z) = (y-z)(z-x)(x-y).$$

Skoro zaś L, P, F są wielomianami symetrycznymi, natomiast G jest wielomianem antysymetrycznym (zmienia znak przy transpozycji zmiennych), wynika stąd, że iloraz $(L - P - F)/G$ też jest antysymetryczny – ma więc wartość zero, gdy dwie zmienne są równe, i w konsekwencji dzieli się znów przez G. To znaczy, że wielomian $L - P - F$ dzieli się przez G^2. Są to wielomiany jednorodne szóstego stopnia, ich iloraz musi być stałą.

Wniosek: $L - P - F = cG^2$. Wartość stałej c znajdujemy, podstawiając w miejsce x, y, z dowolne trzy różne liczby; wychodzi $c = 1$. Tak więc $L - P = F + G^2$. Jest to właśnie „ta zmyślna” tożsamość.

Klub 44

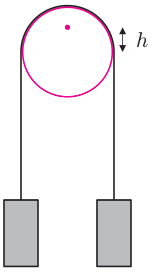
Zadania z fizyki nr 520, 521

Redaguje Jerzy B. BROJAN

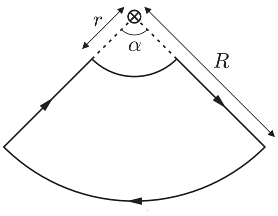
520. Dwa ciężarki o jednakowych masach są połączone długą nicią przełożoną przez nieważki krążek o promieniu r, który może się swobodnie obracać wokół osi odległej o h od środka krążka (rys. 1). Nić nie ślizga się po krążku. Obliczyć okres małych drgań układu wokół położenia równowagi.

521. W prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I_1, a w ramce leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do tego przewodnika – prąd o natężeniu I_2. Ramka składa się z dwóch odcinków radialnych o kącie rozwarcia α oraz łuków okręgów odległych od przewodnika prostoliniowego o r i R (rys. 2). Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1. Znaleźć siłę i moment siły oddziaływania ramki na przewodnik prostoliniowy.

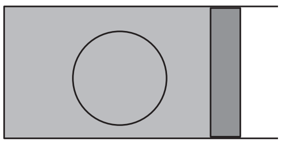
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2011



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z numeru 2/2011

Przypominamy treść zadań:

512. Dwóch studentów przechadzało się nad brzegiem stawu. W mętnej wodzie podskakiwała szyjka butelki wrzuconej przez jakiegoś wandala.

– Założę się o dychę, że potrafię obliczyć średnią głębokość zanurzenia tej butelki – powiedział Fizyk.

– Ściemniasz, przecież nic nie widać w tej zupie! – zaoponował Humanista. – Przyjmuję zakład!

Fizyk ustawił funkcję stopera na swoim zegarku i zmierzył czas 10 okresów drgań butelki – wyszło mu 7,8 sekundy. Przestawił zegarek na kalkulator i po paru obliczeniach zawołał:

– Piętnaście centymetrów, sprawdzamy i jesteś do tyłu o dychę!

Który student wygrał zakład?

513. W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się powietrze, w którym unosi się bańka mydlana (rys. 3). Przesunięto tłok, sprężając powietrze. Jeśli przepływy ciepła można pominąć (przemiana adiabatyczna), to mocniej ogrzało się powietrze wewnątrz bańki, czy na zewnątrz niej, czy jednakowo?

512. Załóżmy, że przynajmniej dolna część butelki ma kształt walcowy, a szukaną głębokość zanurzenia oznaczmy przez h. W położeniu równowagi masa butelki m równa jest masie wypartej wody $Sh\rho$, gdzie S – pole przekroju poprzecznego butelki, ρ – gęstość wody. Jeśli zanurzenie zwiększy się o x, to siła wyporu wzrośnie o $S\rho gx$, zatem mamy do czynienia z ruchem harmonicznym o okresie $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, gdzie k – stała proporcjonalności siły do wychylenia, tzn. $k = S\rho g$. Po przekształceniach można wyznaczyć $h = g(T/2\pi)^2$, tą drogą Fizyk otrzymał wynik $h = 15$ cm.

Podane wyprowadzenie wzoru pomija jednak fakt, że razem z butelką drga także pewna ilość wody otaczającej butelkę, której masę (tzw. masa związana) należy dodać do m we wzorze na T. W efekcie wyliczona wartość h będzie zawyżona – w przeprowadzonym doświadczeniu autor otrzymał zanurzenie o około 25% mniejsze, co w opisanej sytuacji odpowiadałoby wartości 11 cm. A jednak wygrał Humanista...

513. Ciśnienie wewnątrz bańki p_w jest równe sumie ciśnienia zewnętrznego p_z i ciśnienia samej błonki p_b. Ciśnienie błonki jest odwrotnie proporcjonalne do jej promienia, czyli do pierwiastka trzeciego stopnia z objętości powietrza wewnątrz bańki V_w. Dla małych przyrostów mamy więc

$$\frac{\Delta p_b}{p_b} = -\frac{1}{3}\frac{\Delta V_w}{V_w}.$$

Równanie przemiany adiabatycznej gazu w zmiennych V-T w wersji różniczkowej ma postać

$$\frac{\Delta T_w}{T_w} = -(\gamma - 1)\frac{\Delta V_w}{V_w},$$

gdzie $\gamma = c_p/c_V$. Stąd

$$\frac{\Delta p_b}{p_b} = \frac{1}{3(\gamma-1)}\frac{\Delta T_w}{T_w}.$$

Zapiszmy jeszcze przemianę adiabatyczną wewnątrz i zewnątrz bańki w zmiennych p-T:

$$(\gamma-1)\frac{\Delta p_w}{p_w} = \gamma\frac{\Delta T_w}{T_w}, \qquad (\gamma-1)\frac{\Delta p_z}{p_z} = \gamma\frac{\Delta T_z}{T_z}.$$

Jeśli początkowo temperatury były jednakowe, to podstawiając zmiany ciśnienia do wzoru $\Delta p_w = \Delta p_z + \Delta p_b$, dochodzimy do wyniku

$$\left(\gamma p_w - \frac{1}{3}p_b\right)\Delta T_w = \gamma(p_w + p_b)\Delta T_z,$$

z którego widać, że wewnątrz bańki wzrost temperatury był większy.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 508 ($WT = 1{,}00$) i 509 ($WT = 1{,}83$) z numeru 12/2010

Jerzy Witkowski	Radlin	37,45
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,04
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Andrzej Idzik	Bolesławiec	29,30