

Kącik przestrzenny (8) Kąty płaskie w przestrzeni

Tym razem opowiemy o kątach w przestrzeni, a dokładniej o tym, jak rozwiązywać zadania zawierające nierówności miar kątów w przestrzeni. W zadaniach pojawiają się dwa typy kątów – płaskie i dwuścienne. Ten odcinek poświęcimy kątom płaskim, a o dwuściennych opowiemy następnym razem. W zadaniach z nierównościami dotyczącymi kątów płaskich nie ma wielkiej filozofii, należy zapamiętać jedno ważne twierdzenie i jeden prosty wniosek – właśnie od nich rozpoczniemy.

Twierdzenie 1. W dowolnym kącie trójściennym każdy z kątów płaskich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych kątów.

Dowód. Mamy wykazać, że w kącie trójściennym $SABC$ o wierzchołku S zachodzi nierówność $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$ (rys. 1). Przyjmijmy, że $\sphericalangle ASC > \sphericalangle BSC$ (w przeciwnym przypadku nie ma czego dowodzić). Niech B' będzie punktem leżącym wewnątrz ściany ASC , takim że $\sphericalangle CSB' = \sphericalangle CSB$ i $SB' = SB$. Można, oczywiście, przyjąć, że punkt A leży na prostej $B'C$. Wtedy z nierówności trójkąta mamy $AB + BC > AC$, skąd otrzymujemy, że $AB > AB'$. Trójkąty ASB i ASB' mają dwa boki równe, a trzeci w pierwszym jest większy, skąd wniosek, że $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASB'$ (np. na mocy twierdzenia cosinusów). To zaś dowodzi naszej nierówności.

Twierdzenie 2. W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od 360° .

Dowód. Przyjmijmy, że dany kąt bryłowy o wierzchołku S tworzy n ścian. Niech $A_1A_2 \dots A_n$ będzie wielokątem powstałym z przecięcia ścian tego kąta płaszczyzną. Korzystając z poprzedniego twierdzenia dla $i = 1, 2, \dots, n$, dostajemy nierówności

$$\sphericalangle A_{i-1}A_iS + \sphericalangle SA_iA_{i+1} > \sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}.$$

Dodając je wszystkimi stronami, otrzymamy po lewej stronie $n \cdot 180^\circ - d$, gdzie d oznacza sumę kątów płaskich danego kąta bryłowego, a po prawej sumę kątów wielokąta $A_1A_2 \dots A_n$, czyli $(n-2) \cdot 180^\circ$. Stąd wynika, że $d < 360^\circ$.

Dowód twierdzenia 2 wskazuje, że czasem, zamiast patrzeć bezpośrednio na interesujący nas kąt, warto spojrzeć na dwa pozostałe kąty trójkąta i dla nich stosować twierdzenie 1. Wykorzystamy naszą wiedzę do rozwiązania następującego zadania.

1. (OM 55-I-8) Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360^\circ$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że płaszczyzna ABP przecina krawędź CD w punkcie Q (rys. 3). Stosując twierdzenie 1, otrzymujemy

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle CPQ > \sphericalangle BPQ} \text{ oraz } \sphericalangle DPQ + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APQ}.$$

Ponieważ $\sphericalangle CPQ + \sphericalangle DPQ = \sphericalangle CPD$, więc dostajemy

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APB + \sphericalangle BPQ + \sphericalangle APQ = 360^\circ.$$

Jak nietrudno zauważyć, z powyższego zadania wynika ogólniejszy rezultat, który był treścią jednego z zadań na III Austriacko-Polskich Zawodach Matematycznych:

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA + \sphericalangle APD + \sphericalangle BPD + \sphericalangle CPD > 540^\circ.$$

Zadania

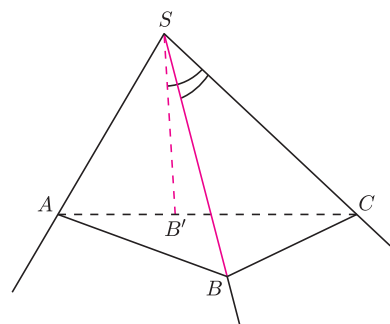
2. (ZWARDONŃ 2001) Udowodnić, że w dowolnym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym wszystkie kąty płaskie są ostre.

3. (YUG 1985) Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

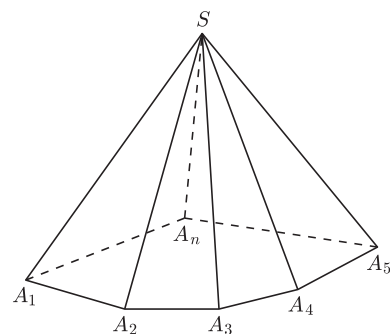
$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA > \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA.$$

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

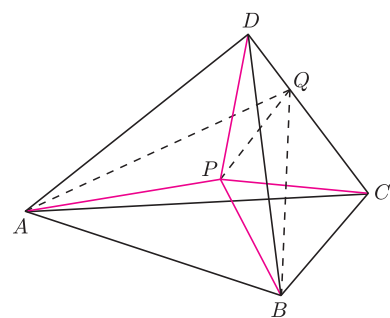
Michał KIEZA



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3