Narysuj równoległobok!

Joanna JASZUŃSKA

Ktoś mi kiedyś powiedział o zadaniach geometrycznych: *Jeśli nie wiesz, co zrobić, narysuj równoległobok*! Jakkolwiek żartobliwa i niepoważna może się ta porada wydawać, jednak czasem działa. Oto kilka przykładów.

Nawias kwadratowy oznacza pole figury.

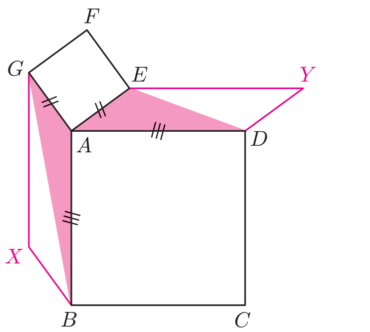
1. Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$, tak samo zorientowane, mają wspólny tylko punkt A. Wykaż, że $[ABG] = [ADE]$.

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

3. W trójkącie ABC zachodzi równość $AB = AC$. Punkt E jest środkiem wysokości AD. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BE. Udowodnij, że $\sphericalangle AFC = 90°$.

4. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Wykaż, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.

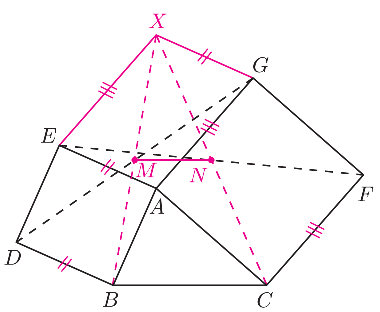
Rozwiązania



Rys. 1

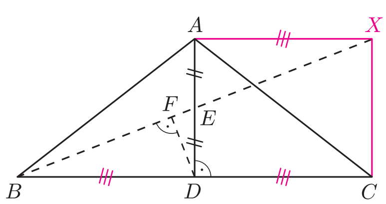
R1. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $BAGX$, a Y – czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EADY$ (rys. 1). Równoległoboki te są przystające, ponieważ $AB = AD$, $AG = AE$ oraz $\sphericalangle BAG + \sphericalangle DAE = 360° - 2\cdot 90° = 180°$. Stąd $[ABG] = \frac{1}{2}[BAGX] = \frac{1}{2}[EADY] = [ADE]$. $\square$

W *deltoidzie* 5/2009 opisano inne rozwiązanie zadania 2.



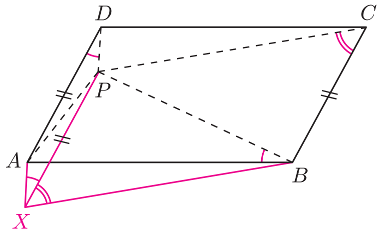
Rys. 2

R2. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EAGX$ (rys. 2). Wtedy $CFXE$ także jest równoległobokiem (bo $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EX}$). Wobec tego punkt N, jako środek jego przekątnej EF, jest też środkiem drugiej przekątnej XC. Analogicznie M jest środkiem XB. Stąd i z twierdzenia Talesa uzyskujemy $MN \parallel BC$ oraz $MN : BC = 1 : 2$. $\square$



Rys. 3

R3. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $ADCX$ (rys. 3). Wtedy $ABDX$ jest równoległobokiem o środku E (bo $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$ oraz $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$), więc punkty B, F, E, X są współliniowe. Odcinki AC i DX są średnicami okręgu opisanego na prostokącie $ADCX$. Ponadto $\sphericalangle DFX = 90°$, więc punkt F leży na tym okręgu. Stąd $\sphericalangle AFC = 90°$. $\square$



Rys. 4

R4. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $PDAX$ (rys. 4). Wtedy $PCBX$ także jest równoległobokiem oraz zachodzą równości

$$(*)\ \sphericalangle AXP = \sphericalangle ADP = \sphericalangle ABP \quad \text{oraz} \quad (**)\ \sphericalangle PXB = \sphericalangle PCB.$$

Z równości $(*)$ (uwzględniając wzajemne położenie odpowiednich punktów) wynika, że punkty P, A, X, B leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PXB$, co razem z równością $(**)$ daje tezę. $\square$

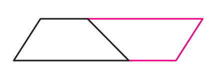
Zadania domowe

5. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ o polu 1 przeciwległe boki są równe i równoległe. Wyznacz pole trójkąta ACE.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCX$. Wtedy $CDEX$ i $EFAX$ też są równoległobokami...

6. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio ramion BC i AD. Wykaż, że $AB + CD = 2 \cdot MN$ i że $[ABCD] = 2 \cdot [AMD]$.

Wskazówka. Uzupełnij dany trapez do równoległoboku:



7. Dany jest trójkąt ABC. Wykaż, że z jego środkowych można zbudować trójkąt.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCX$.

8. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty D i E należą odpowiednio do boków BC i AB tego trójkąta i $CD = BE$. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Udowodnij, że $AD = 2 \cdot BM$.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem równoległoboku $EBDX$.

9. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90°$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $AD = BD$ oraz $AB = CD$. Wykaż, że $\sphericalangle ACD > 30°$.

Wskazówka. Niech punkt X będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $BACX$.

Zadania 2 i 9 pochodzą z LIII Olimpiady Matematycznej, zadanie 4 – z XLVIII OM.