Matematyka przyjemna i pożyteczna,
czyli o konkursach Fundacji Matematyków Wrocławskich słów kilka

Fundacja Matematyków Wrocławskich została ustanowiona z inicjatywy prof. Andrzeja Hulanickiego w 1990 roku przez profesorów Stanisława Hartmana i Kazimierza Urbanika. Jej celem jest pomoc utalentowanym młodym ludziom w uczeniu się i studiowaniu matematyki oraz w pracy naukowej, a także doskonalenie zawodowe nauczycieli i popularyzacja nauki. Działalność ta finansowana jest z darowizn osób prywatnych oraz z dotacji różnych instytucji.

Popularyzacja matematyki

FMW wspiera wydawanie kwartalnika dla młodzieży pt. „Magazyn Miłośników Matematyki” oraz edytowanego w Internecie „Wrocławskiego Portalu Matematycznego”, organizuje międzyszkolne kółka matematyczne, obozy naukowe i odczyty dla uczniów, a także seminaria, kursy i wyjazdy szkoleniowe dla nauczycieli. Jednak najbardziej charakterystyczne w działalności fundacji są autorskie konkursy, wśród których wymienić należy: Maratony Matematyczne, Matematyczne Marsze na Orientację, Dolnośląskie Mecze Matematyczne, Konkursy Matematyczne „Koma”, Olimpiadę Lingwistyki Matematycznej, Zawody Lingwistyczne dla SP „Wieża Babel”, Konkursy Matematycznego Origami „Żuraw”, Mistrzostwa Wrocławia w Geometrii Elementarnej oraz Mistrzostwa Wrocławia w Szybkim Liczeniu. Są one adresowane do uczniów ze wszystkich poziomów szkół, a niektóre także do rodziców i nauczycieli. Mają otwarty charakter i często uczestniczą w nich szkoły z odległych regionów Polski. Cieszą się dużym powodzeniem, gdyż żaden nie ma typowej dla wielu innych konkursów formy, sprowadzającej się do kartki z zadaniami, ołówka, karty odpowiedzi i… „pokaż, co umiesz”. Forma wrocławskich konkursów zawsze jest atrakcyjna i sprzyja nie tyle sprawdzeniu wiedzy, co jej zdobywaniu. To konkursy, które uczą i bawią, pokazują, że matematyka jest pożyteczna i przyjemna. Ponieważ szczupłe rozmiary *Delty* nie pozwalają przedstawić wszystkich, ani nawet kilku konkursów, opowiem o moim ulubionym…

Konkurs matematyczny „Koma”

Jest fajny, bo nie korzysta ze szkolnej wiedzy, dzięki czemu może być skierowany nie tylko do najlepszych matematyków, ale do wszystkich uczniów o dużym potencjale intelektualnym. Ważna jest w nim umiejętność słuchania ze zrozumieniem, robienia dobrych notatek i przetwarzania informacji. Konkurs zaczyna się wykładem dotyczącym zupełnie nowego dla słuchaczy pojęcia. Po nim jest przerwa na uporządkowanie notatek, rozmowy z kolegami, nauczycielami i wykładowcą, zadawanie pytań i wyjaśnianie wątpliwości. Potem następuje część zadaniowa (można w niej korzystać ze sporządzonych wcześniej notatek). Na koniec jest dalsza część wykładu, dotycząca zastosowań poznanego pojęcia. Co ciekawe, wykłady finałowe dotyczą tego samego zagadnienia dla wszystkich poziomów szkół, powtarza się też 90% zadań. Analiza wyników wskazuje, że wiek uczniów i ich wcześniejsza wiedza nie mają w tym konkursie decydującego znaczenia. Jak to wygląda w praktyce, pokażemy na przykładzie tegorocznej edycji finałowej, której bohaterem były…

Wierzchołki piramid. Dla danej listy liczb L tworzymy nową listę $S[L]$ tak, że dodajemy i dzielimy przez 2 kolejne pary liczb, np. gdy $L = [1, 2, 4, 2, 5]$, to $S[L] = [3/2, 3, 3, 7/2]$, $S[3, 5, 9] = [4, 7]$, $S[5, -5, 7, 11, -11] = [0, 1, 9, 0]$.

Ćwiczenie. Spróbuj odgadnąć, co kryje się pod kratkami: $S[1, 5, \square, 13] = [3, 4, 8]$, $S[\square, 4, 8, \square] = [3, \square, 5]$. Czasem z uzupełnieniem list może być kłopot, bo można to zrobić na wiele sposobów albo żaden sposób nie jest dobry, np. $S[\square, 4] = \square$, $S[\square, 4, 8] = [3, 5]$.

Opisaną operację S uśredniania listy liczb można iterować, czyli powtarzać wiele razy, np. $S^3[1, 2, 4, 2, 5] = S[S[S[1, 2, 4, 2, 5]]] = S[S[3/2, 3, 3, 7/2]] = S[9/4, 3, 13/4] = [21/8, 25/8]$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 23/8 & & & & \\ & & & 21/8 & & 25/8 & & & \\ & & 9/4 & & 3 & & 13/4 & & \\ & 3/2 & & 3 & & 3 & & 7/2 & \\ 1 & & 2 & & 4 & & 2 & & 5 \end{array}$$

Wyniki kolejnych iteracji wygodnie jest notować w postaci piramidy, jak na diagramie obok. Możemy robić to tak długo, aż pozostanie jedna liczba, którą nazwiemy wierzchołkiem piramidy i oznaczymy $W[L]$, np. $W[1, 2, 4, 2, 5] = S^4[1, 2, 4, 2, 5] = S[21/8, 25/8] = 23/8$.

Ćwiczenie. Spróbuj uzupełnić poniższe piramidy.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \square & & & \\ & & \square & & \square & & \\ & 4 & & 2 & & \square & \\ \square & & \square & & -1 & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & \square & & \square & & \\ & \square & & -3/2 & & \square & \\ \square & & -4 & & \square & & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & \square & & & \\ & & 3/8 & & 0 & & \\ & \square & & 1/8 & & \square & \\ 3/2 & & \square & & \square & & -3/4 \end{array}$$

Przy obliczaniu wierzchołków piramid zachodzą pewne ogólne prawidłowości. Czy potrafisz je uzasadnić?

1) $W[a, a, a, \ldots, a] = a.$
Np. $W[8, 8, 8, 8, 8] = 8$, bo wtedy cała piramida składa się z ósemek. Sprawdzimy to dla drugiego poziomu:
$$S[8, 8, 8, 8, 8] = [(8 + 8)/2, (8 + 8)/2, (8 + 8)/2, (8 + 8)/2] = [8, 8, 8, 8].$$

2) $W[c \cdot a_1, c \cdot a_2, c \cdot a_3, \ldots, c \cdot a_n] = c \cdot W[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n].$
Np. $W[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5] = 7 \cdot W[2, 3, -4, 5]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5]$ powstają z przemnożenia przez 7 liczb z piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Sprawdzimy to dla drugiego poziomu:
$$S[7 \cdot 2, 7 \cdot 3, 7 \cdot (-4), 7 \cdot 5] = [(7 \cdot 2 + 7 \cdot 3)/2, (7 \cdot 3 + 7 \cdot (-4))/2, (7 \cdot (-4) + 7 \cdot 5)/2] =$$
$$= [7 \cdot (2 + 3)/2, 7 \cdot (3 + (-4))/2, 7 \cdot ((-4) + 5)/2] = [7 \cdot (5/2), 7 \cdot (-1/2), 7 \cdot (1/2)].$$

3) $W[a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n] = W[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] + W[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n].$
Np. $W[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2] = W[2, 3, -4, 5] + W[5, 4, 11, 2]$, bo wszystkie liczby w piramidzie o podstawie $[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2]$ powstają z dodania odpowiednich liczb z piramid o podstawach $[2, 3, -4, 5]$ i $[5, 4, 11, 2]$.
Sprawdzimy to dla drugiego poziomu:
$$S[2 + 5, 3 + 4, -4 + 11, 5 + 2] = [(2 + 5 + 3 + 4)/2, (3 + 4 + (-4) + 11)/2, ((-4) + 11 + 5 + 2)/2] =$$
$$= [(2 + 5)/2 + (3 + 4)/2, (3 + 4)/2 + ((-4) + 11)/2, ((-4) + 11)/2 + (5 + 2)/2].$$

4) $W[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n] = W[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1].$
Np. $W[2, 3, -4, 5] = W[5, -4, 3, 2]$, bo piramida o podstawie $[5, -4, 3, 2]$ jest lustrzanym odbiciem piramidy o podstawie $[2, 3, -4, 5]$. Gdzie należy ustawić lusterko?

Zatem jeśli obliczymy, że $W[2, 3, -4, 5] = 1/2$, to ten fakt możemy wykorzystać do obliczenia wierzchołków wielu innych piramid, np.

- $W[10, 15, -20, 25] = W[5 \cdot 2, 5 \cdot 3, 5 \cdot (-4), 5 \cdot 5] = 5 \cdot W[2, 3, -4, 5] = 5 \cdot 1/2 = 5/2,$
- $W[-20, -30, 40, -50] = W[(-10) \cdot 2, (-10) \cdot 3, (-10) \cdot (-4), (-10) \cdot 5] = (-10) \cdot 1/2 = -5,$
- $W[1, 3/2, -2, 5/2] = W[1/2 \cdot 2, 1/2 \cdot 3, 1/2 \cdot (-4), 1/2 \cdot 5] = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4,$
- $W[3, 4, -3, 6] = W[2 + 1, 3 + 1, (-4) + 1, 5 + 1] = W[2, 3, -4, 5] + W[1, 1, 1, 1] = 1/2 + 1 = 3/2,$
- $W[1, 0, 7, -2] = W[3 - 2, 3 - 0, 3 - (-4), 3 - 5] = W[3, 3, 3, 3] - W[2, 3, -4, 5] = 3 - 1/2 = 5/2.$

5) Poniższe przykłady ilustrują jeszcze inny pomysł na sprytne obliczanie wierzchołków niektórych piramid:

- $W[6, 6, 6, 6, 6, 0, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0] = W[3, 3, 3, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 0] + W[0, 0, 0, 0, 0, 3, 3, 3, 3, 3] =$
  $= W[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3] = 3,$
- $W[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2] = W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] + W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] = 1 + 1/2 \cdot (W[0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1] + W[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]) =$
  $= 1 + 1/2 \cdot W[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = 1 + 1/2 \cdot 1 = 3/2,$
- $W[3, 5, 7, 9] = 1/2 \cdot (W[3, 5, 7, 9] + W[3, 5, 7, 9]) = 1/2 \cdot (W[3, 5, 7, 9] + W[9, 7, 5, 3]) = 1/2 \cdot W[3 + 9, 5 + 7, 7 + 5, 9 + 3] =$
  $= 1/2 \cdot W[12, 12, 12, 12] = 1/2 \cdot 12 = 6,$
- $W[1, 4, 7, 10, 13, 16] = 1/2 \cdot (W[1, 4, 7, 10, 13, 16] + W[1, 4, 7, 10, 13, 16]) = 1/2 \cdot (W[1, 4, 7, 10, 13, 16] + W[16, 13, 10, 7, 4, 1]) =$
  $= 1/2 \cdot W[1 + 16, 4 + 13, 7 + 10, 10 + 7, 13 + 4, 16 + 1] = 1/2 \cdot W[17, 17, 17, 17, 17, 17] = 1/2 \cdot 17 = 17/2,$
- $W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] = 1/2 \cdot (W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] + W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]) =$
  $= 1/2 \cdot (W[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4] + W[4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1]) = 1/2 \cdot W[5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5] = 1/2 \cdot 5 = 5/2.$

6) Pokażemy jeszcze jedną własność wierzchołków piramid. Niech $\{a_i\}, \{b_j\}, \{c_i\}$ będą dowolnymi ciągami liczb, przy czym $\{a_i\}$ ma tyle samo wyrazów co $\{c_i\}$. Wówczas
$$W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 1, \{b_j\}, -1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, -2, \{b_j\}, 2, \{c_i\}] =$$
$$= W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, -5, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, -2/3, \{b_j\}, 2/3, \{c_i\}].$$
Wynika ona z poniższej prostej obserwacji. Niech $\{0_i\}$ i $\{0_j\}$ oznaczają ciągi zer tej samej długości co ciągi $\{a_i\}$ i $\{b_j\}$. Wtedy
$$W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] = W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] + (-1) \cdot W[\{0_i\}, 0, \{0_j\}, 1, \{0_i\}] =$$
$$= W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] - W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, 0, \{0_i\}] = 0.$$
Stąd wynika na przykład, że:
$$W[\{a_i\}, -2/3, \{b_j\}, 2/3, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] + (-2/3) \cdot W[\{0_i\}, 1, \{0_j\}, -1, \{0_i\}] =$$
$$= W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}] + (-2/3) \cdot 0 = W[\{a_i\}, 0, \{b_j\}, 0, \{c_i\}].$$
Można też łatwo zobaczyć, że:
$$W[\{a_i\}, 7, \{b_j\}, 3, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 9, \{b_j\}, 1, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 6, \{b_j\}, 4, \{c_i\}] = W[\{a_i\}, 5, \{b_j\}, 5, \{c_i\}],$$
wystarczy do pierwszej piramidy „dodać" odpowiednio $[\{0_i\}, 2, \{0_j\}, -2, \{0_i\}]$, $[\{0_i\}, -1, \{0_j\}, 1, \{0_i\}]$ lub $[\{0_i\}, -2, \{0_j\}, 2, \{0_i\}]$.

7) Można mozolnie sprawdzić, że zachodzą równości: $W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] = 7/128$, $W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 3 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ i $W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] = 5 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$. Ta informacja pozwala łatwo obliczać wierzchołki niektórych piramid o podstawie długości 8, np.

- $W[0, 2, 7, 0, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + 7 \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] = 2 \cdot 7/128 + 7 \cdot 3 \cdot 7/128 = 23 \cdot 7/128,$
- $W[0, 1, 2, 6, 0, 0, 0, 0] = 1 \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + 2 \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] + 6 \cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] =$
  $= 1 \cdot 7/128 + 2 \cdot 3 \cdot 7/128 + 6 \cdot 5 \cdot 7/128 = 37 \cdot 7/128,$
- $W[0, 5, 1, 2, 7, 1, 3, 0] = (5 + 3) \cdot W[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] + (1 + 1) \cdot W[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0] + (2 + 7) \cdot W[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0] =$
  $= 8 \cdot 7/128 + 2 \cdot 3 \cdot 7/128 + 9 \cdot 5 \cdot 7/128 = 59 \cdot 7/128.$

Tyle wykładu, a teraz zapraszamy do rozwiązania kilku konkursowych zadań. Czy zrobisz to w 60 minut?

Zadanie 1. Uzupełnij zapisy.

a) $S[0,4,6] = \dots$ c) $S^3[12,4,10,2,0] = \dots$ e) $S[\square,\square,8,2] = [1,6,\square]$.
b) $S[12,4,10,2,0] = \dots$ d) $S[2,\square,8] = [4,7]$. f) $S[\square,\square,\square,2] = [5/2, 22/4, 5]$.

Zadanie 2. Uzupełnij piramidy.

a)
$$\begin{array}{ccccccc} & & & \square & & & \\ & & \square & & \square & & \\ & \square & & 3 & & 5 & \\ 2 & & 4 & & \square & & 8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccccc} & & & \square & & & \\ & & \square & & \square & & \\ & 3 & & \square & & \square & \\ 1 & & \square & & 7 & & 9 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & \square & & \\ & 2 & & \square & & \square & \\ 1 & & \square & & \square & & \square \end{array}$$

Zadanie 3. Podaj po trzy różne podstawy L takie, że:

a) $S[L] = [-5,2,7]$, b) $W[L] = 1$, c) $W[L] = 0$.

Zadanie 4. Ile wynosi suma wszystkich liczb w piramidzie o danej podstawie?

a) $[2/3, 2/3, 2/3, 2/3, 2/3, 2/3]$,
b) $[7,-7,7,-7,7,-7,7,-7,7,-7]$,
c) $[7,-7,7,-7,7,-7,7,-7,7,-7,7]$,
d) $[-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7]$,
e) $[8,-8,8,-8,8,8]$.

Zadanie 5. Uzupełnij. Niech p oznacza ilość liczb w podstawie L pewnej piramidy.

a) Dla $p = 37$ ilość liczb w $S[L]$ jest równa $\dots$, a w $S^3[L]$ jest równa $\dots$
b) Ilość liczb w $S^{47}[L]$ jest równa 123, więc $p = \dots$
c) Dla $p = 7$ ilość liczb w całej piramidzie jest równa $\dots$, a dla $p = 8$ jest równa $\dots$
d) Jeśli w całej piramidzie jest 21 liczb, to $p = \dots$, a jeśli jest ich 66, to $p = \dots$
e) Jeśli w całej piramidzie jest 3 razy więcej liczb niż w podstawie, to $p = \dots$, a jeśli jest ich 9 razy więcej, to $p = \dots$

Zadanie 6. Spośród podanych liczb podkreśl:

a) największą $W[173,234,439]$, $W[234,173,439]$, $W[173,439,234]$, $W[439,234,173]$.
b) najmniejszą $W[0,1,0,0,0,0,0,0,0]$, $W[1,0,0,0,0,0,0]$, $W[1,0,0,0,0,0,0,0,0]$.
c) najmniejszą $W[0,2,4,6,8]$, $W[2,4,6,8]$, $2 \cdot W[1,2,3,4]$, $W[0,2,4,6,8,10]$.
d) największą $W[-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7]$, $(-2) \cdot W[2,2,2,2,2,2,2]$, $W[1,-2,-5,-8]$.

Zadanie 7. Wiadomo, że $W[0,0,1,0,0,0]$ jest 10 razy większe od $W[1,0,0,0,0,0]$ i 2 razy większe od $W[0,1,0,0,0,0]$. Ile razy większa od $W[1,0,0,0,0,0]$ jest liczba:

a) $W[0,0,4,0,0,0]$, c) $W[1,0,2,0,0,0]$, e) $W[2,3,4,0,0,0]$, g) $W[0,0,0,2,0,0]$,
b) $W[0,7,0,0,0,0]$, d) $W[0,2,3,0,0,0]$, f) $W[-7,0,3,0,0,0]$, h) $W[0,3,0,0,5,0]$.

Zadanie 8. Wiadomo, że podstawa L piramidy składa się z trzech liczb, których suma jest równa sumie liczb z $S[L]$. Oceń wypowiedzi Karola Omyłka.

a) W L musi być choć jedno zero.
b) Suma liczb z L musi być równa zero.
c) W L musi być liczba ujemna.
d) Wszystkie liczby z L muszą być równe 0.
e) Suma liczb z $S[L]$ musi być równa $2 \cdot W[L]$.
f) Suma liczb z L musi być równa $2 \cdot W[L]$.

Zadanie 9. Wpisz jeden ze znaków: $<, =, >$:

a) $W[22,31,2,55,32,22,2,51,47]$ $\dots$ $W[22,31,0,55,32,22,4,51,47]$,
b) $W[22,31,-1,55,32,22,5,51,47]$ $\dots$ $W[22,31,0,55,32,22,4,51,47]$,
c) $W[22,31,3,55,32,22,2,51,47]$ $\dots$ $W[22,31,0,55,32,22,4,51,47]$,
d) $W[22,31,-2,55,32,22,-2,51,47]$ $\dots$ $W[22,31,0,55,32,22,4,51,47]$,
e) $W[4,5,7,8,9,9,9,9,8,7,5,4]$ $\dots$ $W[8,10,14,16,18,18,0,0,0,0,0,0]$,
f) $2 \cdot W[4,5,7,8,9,9,0,0,0,0,0,0]$ $\dots$ $W[8,10,14,16,18,18,0,0,0,0,0,0]$,
g) $W[2,2,2,2,2,2,9,9,8,7,5,4]$ $\dots$ $W[8,10,14,16,18,18,0,0,0,0,0,0]$,
h) $W[0,0,0,0,0,0,18,18,16,14,10,8]$ $\dots$ $W[8,10,14,16,18,18,0,0,0,0,0,0]$.

Zadanie 10. Oznaczmy $[k\,|\,m] = [1,1,\dots,1,0,0,\dots,0]$ (k jedynek, m zer). Wtedy np. $[9,9,3,3,0] = 6[2\,|\,3] + 3[4\,|\,1]$, $2S[2+3\,|\,1] = [4\,|\,1] + [5\,|\,0]$. Zapisz tymi symbolami:

a) $[8,7,2,1] = \dots$, d) $S^8[k\,|\,0] = \dots$, g) $W[k\,|\,1] = \dots$,
b) $[1,6,2,5] = \dots$, e) $4S[k+4\,|\,m+8] = \dots$, h) $W[k\,|\,2] = \dots$,
c) $[5,-6,0,1] = \dots$, f) $S^2[k\,|\,m] = \dots$, i) $W[k\,|\,k] = \dots$

Opracowanie tekstu: Małgorzata MIKOŁAJCZYK, autorem zadań z KOMY jest Krzysztof OMILJANOWSKI, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego.