Urok zbioru μ

Michał MIŚKIEWICZ

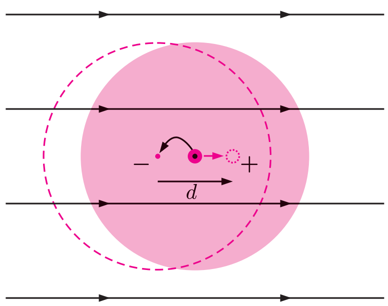
Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej złotym medalem w XXXII Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2010 roku (Olsztyn).

Tematem mojej pracy były własności pewnych szczególnych punktów na płaszczyźnie – punktów tytułowego zbioru μ. W poniższym tekście przedstawię niektóre z tych własności oraz przykłady pokazujące, że przy użyciu dowiedzionych twierdzeń można wyciągnąć wiele niemal natychmiastowych wniosków.

Definicja. Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie. Weźmy taki punkt X, że dla każdej prostej k przechodzącej przez X suma kwadratów odległości punktów $A_1, \ldots, A_n$ od k jest taka sama. Zbiór $\mu(\mathcal{A})$ definiujemy jako zbiór wszystkich punktów X spełniających powyższy warunek.

Na przykład, jest oczywiste, że dla dowolnego punktu A zachodzi $\mu(\{A\}) = \{A\}$. Natomiast pierwszy przypadek zbioru μ, z którym się zetknąłem, pochodzi z zadania Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Poniżej podaję rozwiązanie jednego z uczestników.

Przykład 1 (zadanie 3. z I etapu IV OMG). *Dany jest kwadrat $ABCD$ o środku w S. Wówczas $S \in \mu(\{A, B, C, D\})$.*



Weźmy dowolną prostą k przechodzącą przez S. Poprowadźmy do niej prostopadłą w S i nazwijmy ją l. Przez $|Ak|$ będziemy oznaczać odległość punktu A od prostej k. Z twierdzenia Pitagorasa zachodzi równość $|Ak|^2 + |Al|^2 = AS^2$ oraz analogiczne równości dla punktów B, C, D. Wobec tego sumy kwadratów odległości od k i l wzięte razem dają $AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2$. Ponadto, ze względu na symetrię sytuacji, sumy odległości wierzchołków kwadratu od prostych k i l muszą być równe. Stąd już otrzymujemy, że suma kwadratów odległości A, B, C, D od k wynosi $\frac{1}{2}(AS^2 + BS^2 + CS^2 + DS^2)$, jest zatem niezależna od wyboru k.

Inną metodą rozwiązania jest wykazanie najpierw, że $S \in \mu(\{A, B\})$ i analogicznie $S \in \mu(\{C, D\})$; stąd już łatwo wynika teza. Można wyobrazić sobie sporo przykładów opartych na podobnych obserwacjach. Próba znalezienia ogólnych warunków na to, kiedy zbiór μ jest niepusty, lub też kiedy dany punkt należy do zbioru μ, w naturalny sposób prowadzi do poniższego twierdzenia. Podaje ono takie warunki wyrażone analitycznie, a ponadto pozwala na wyciąganie dość ogólnych wniosków, które zostaną zaprezentowane dalej.

Twierdzenie. *Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie, a S – środkiem masy tych punktów. Wówczas zbiór $\mu(\mathcal{A})$ jest jedno- lub dwuelementowy i symetryczny względem S.*

Obierając na płaszczyźnie protokątny układ współrzędnych, możemy punkt o współrzędnych (x, y) utożsamiać z liczbą zespoloną $x + iy$. Takie przyporządkowanie punktom liczb zespolonych nazywamy układem współrzędnych zespolonych.

Dowód. Wprowadźmy układ współrzędnych zespolonych. Liczbę zespoloną odpowiadającą punktowi A_k będziemy oznaczać a_k. Sprawdźmy najpierw warunki równoważne temu, że $0 \in \mu(\mathcal{A})$. Zamiast liczyć odległości naszych punktów od zmiennej prostej przechodzącej przez 0, będziemy dla zmiennej liczby α z okręgu jednostkowego liczyć odległości $\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n$, czyli obróconych wokół 0 punktów $a_1, \ldots, a_n$, od prostej urojonej. Zgodnie ze wzorem $\Re(x) = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$ suma kwadratów odległości tych punktów od prostej urojonej to

$$\sum_{k=1}^{n} (\Re(\alpha a_k))^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha a_k + \overline{\alpha a_k}}{2} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha\overline{\alpha} a_k \overline{a_k}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^2 a_k^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{\alpha}^2 \overline{a_k}^2}{4} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{a_k} + \frac{1}{2} \Re\Big(\alpha^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big).$$

Pierwszy człon jest, oczywiście, stały, natomiast gdy α przebiega okrąg jednostkowy, liczba w nawiasie przebiega okrąg o środku w 0. Gdy $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$, część rzeczywista, oczywiście, jest zmienna – dlatego $0 \notin \mu(\mathcal{A})$. W przeciwnym przypadku rozważany okrąg jest zdegenerowany do punktu i wtedy $0 \in \mu(\mathcal{A})$.

Warto zauważyć, że jeśli warunek na należenie punktu x do $\mu(\mathcal{A})$ zapiszemy we współrzędnych kartezjańskich, to problem okazuje się równoważny następującemu: w przestrzeni dla danych prostych $a \parallel b$ i punktu S wykazać, że istnieje jedna lub dwie pary punktów $A \in a$, $B \in b$, takie że odcinki SA i SB są równe i prostopadłe.

Otrzymaliśmy więc warunek konieczny i dostateczny dla zera. Aby sprawdzić warunek dla punktu x, wystarczy przesunąć nasze punkty o wektor $-x$. Następujące warunki są więc równoważne warunkowi $x \in \mu(\mathcal{A})$:

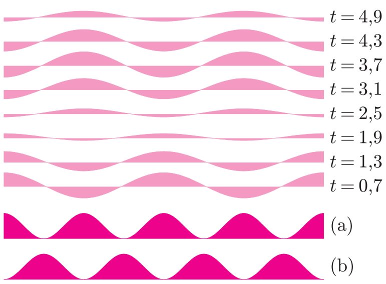
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - x)^2 = 0, \quad nx^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które, oczywiście, ma jedno lub dwa rozwiązania w zbiorze liczb zespolonych, przy czym ze wzoru Viète'a ich średnia arytmetyczna to $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, czyli punkt S. □

Korzystając z wyżej wykazanej własności zbioru μ, można łatwo wyprowadzać kolejne. W szczególności, po dokładnym przyjrzeniu się dowodowi okazuje się, że warunek z definicji można znacząco osłabić.

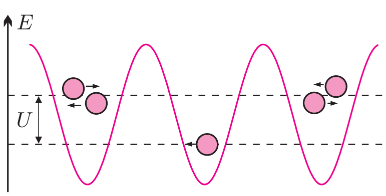
Wniosek. Niech $\mathcal{A}$ będzie skończonym zbiorem punktów na płaszczyźnie. Wówczas zbiór $\mu(\mathcal{A})$ składa się ze wszystkich takich punktów X, że dla pewnych trzech różnych prostych k_1, k_2, k_3 przechodzących przez X suma kwadratów odległości punktów z $\mathcal{A}$ od k_1, k_2 i k_3 jest taka sama.

Poniższe przykłady można rozwiązać przy użyciu układu współrzędnych (sprawdzając wyprowadzone w twierdzeniu warunki), ale łatwiej jest zastosować uzyskane wyniki jakościowe.



Przykład 2. *Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie n-kątem foremnym o środku S. Wtedy $\mu(\{A_1, A_2\ldots, A_n\}) = \{S\}$.*

Zgodnie ze wspomnianym wnioskiem, aby wykazać należenie S do zbioru μ, wystarczy zauważyć, że ze względu na symetrię suma kwadratów odległości od prostych SA_1, SA_2, SA_3 jest taka sama. Co prawda użyty argument wymaga naprawy dla $n = 4$, ale na szczęście ten przypadek został już rozważony. Skoro S to środek ciężkości rozważanych punktów, to zgodnie z twierdzeniem jest jedynym punktem zbioru μ.



Przykład 3. Zbadajmy zbiór $\mu(\{A, B, C, D\})$, gdzie $ABCD$ jest rombem o kątach 60° i 120°, czyli składającym się z dwóch trójkątów równobocznych. Przyjmijmy, że $AC > BD$.

Zauważmy, że odległości $|A, BD|$, $|A, BC|$, $|C, BD|$, $|C, AB|$, $|D, AB|$, $|D, BC|$ są równe. W związku z tym sumy kwadratów odległości wierzchołków rombu od prostych AB, BC i BD także są równe. Oznacza to, że $B \in \mu(\{A, B, C, D\})$. Stosując twierdzenie, otrzymujemy $\mu(\{A, B, C, D\}) = \{B, D\}$.

W dalszej części mojej pracy zajmowałem się, między innymi, charakteryzacją zbiorów o jednoelementowym zbiorze μ, to jest takich, że środek masy należy do zbioru μ. Opisałem także geometryczne znaczenie zbioru μ, gdy rozważamy zbiór wierzchołków trójkąta. Z możliwych dróg uogólnienia tego problemu szczególnie ciekawe wydaje mi się postawienie analogicznych pytań dla zbiorów w wyższych wymiarach. Otrzymane analitycznie warunki są podobne, ale nie doszedłem do dobrego opisu klasy takich skończonych zbiorów punktów przestrzeni co najmniej trójwymiarowej, które mają niepusty zbiór μ. Można też zastanowić się nad dostosowaniem definicji zbioru μ do zbiorów nieskończonych.

Rozwiązanie zadania F 786. Rozwiązanie nie zależy od kształtu naczynia – środek ciężkości leży najniżej, gdy naczynie napełnimy, tak by znalazł się on na powierzchni wody.

Jeśli bowiem poziom wody w naczyniu leży poniżej środka ciężkości, to dolanie do naczynia niewielkiej ilości wody spowoduje obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości dodawanej wody leży poniżej środka ciężkości naczynia z wodą przed dolaniem.

Jeśli natomiast poziom wody w naczyniu leży powyżej środka ciężkości, to odlewanie z naczynia niewielkiej ilości wody spowoduje również obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości ujmowanej wody leży powyżej środka ciężkości naczynia z wodą przed jej ujęciem.

Z tych dwóch faktów wynika, że podwyższanie poziomu wody, gdy środek ciężkości leży powyżej tego poziomu, oraz obniżanie poziomu wody, gdy środek ciężkości leży poniżej tego poziomu, powodują obniżanie położenia środka ciężkości. Zatem środek ciężkości leży najniżej, gdy znajduje się na powierzchni wody.

Autorem rozwiązania jest Marcin Peczarski.