Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr Zadania z matematyki nr 619, 620

Redaguje Marcin E. KUCZMA

619. Szachownica o rozmiarach $n \times n$ została pokryta płytkami 2×2. Każda płytka pokrywa dokładnie cztery pola. Płytki zachodzą na siebie, ale nie wystają poza brzeg szachownicy. Liczba płytek przekracza $2(n^2 - n)/3$. Dowieść, że można usunąć jedną płytkę tak, by pozostałe płytki nadal pokrywały całą szachownicę.

620. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba całkowita n, że liczba $P(n)$ ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Zadanie 620 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2010

Przypominamy treść zadań:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 0 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 2 && 4 && 2 && \\ & 3 && 7 && 7 && 3 & \\ 4 && 10 && 12 && 10 && 4 \\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots \end{array}$$

611. Diagram przedstawia początkowe wiersze nieskończonej tabeli trójkątnej. Skrajnymi elementami kolejnych wierszy są kolejne liczby naturalne. Ponadto obowiązuje reguła: jeśli liczby b, c są sąsiednimi elementami dowolnego wiersza, nad nimi znajduje się liczba a, zaś pod nimi liczba d, to $a + d = b + c + 2$. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k \geq 2$ istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każda występuje w tej tabeli dokładnie k razy.

612. Funkcja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 ax$$

(dla pewnej stałej rzeczywistej a). Dowieść, że jeżeli f jest funkcją okresową, to a jest liczbą wymierną.

611. Przekręcamy diagram o 45° tak, by otrzymać tabelę – nieskończoną macierz $A = [a_{m,n}]_{m,n\geq 0}$; jest to lewa z dwóch tabelek poniżej:

$$A:\ \begin{array}{llll} 0 & 1 & 2 & 3\ \dots \\ 1 & 4 & 7 & 10\ \dots \\ 2 & 7 & 12 & 17\ \dots \\ 3 & 10 & 17 & 24\ \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \qquad B:\ \begin{array}{llll} 1 & 3 & 5 & 7\ \dots \\ 3 & 9 & 15 & 21\ \dots \\ 5 & 15 & 25 & 35\ \dots \\ 7 & 21 & 35 & 49\ \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Zgodnie z treścią zadania, jej wyrazy są związane zależnościami: $a_{n,0} = a_{0,n} = n$,

$$a_{m,n} + a_{m+1,n+1} = a_{m+1,n} + a_{m,n+1} + 2.$$

Patrząc na tabelkę, odgadujemy wzór jawny $a_{m,n} = 2mn + m + n$. Sprawdzamy, że te liczby spełniają napisane przed chwilą równania (które wyznaczają zawartość całej tabeli jednoznacznie).

Tworzymy nową macierz nieskończoną $B = [b_{m,n}]_{m,n\geq 0}$ o wyrazach $b_{m,n} = 2a_{m,n} + 1$ (prawy diagram powyżej). Zachodzą równości $b_{n,0} = b_{0,n} = 2n + 1$,

$$b_{m,n} = 2(2mn + m + n) + 1 = (2m + 1)(2n + 1).$$

Tak więc B jest po prostu tabliczką mnożenia liczb nieparzystych. Każda liczba nieparzysta występuje w niej tyle razy, ile ma różnych dzielników dodatnich.

Niech teraz $k \geq 2$ będzie zadaną liczbą całkowitą. Bierzemy dowolną liczbę pierwszą $p > 2$; wówczas liczba p^{k-1} wystąpi w tabeli B dokładnie k razy. Wracając do tabeli A, widzimy, że dokładnie k razy pojawi się w niej liczba $(p^{k-1} - 1)/2$. Jest nieskończenie wiele liczb pierwszych – mamy więc tezę zadania.

612. Niech T będzie okresem funkcji f. Z równości $f(T) = f(0)$, czyli

$$\cos^2 aT = 1 - \sin^2 T = \cos^2 T$$

(czyli jeszcze prościej: $\cos 2aT = \cos 2T$) wnosimy, że

$$2aT = \pm 2T + 2k\pi \qquad (k \text{ – liczba całkowita}).$$

Pochodna $f'(x) = \sin 2x - a \sin 2ax$ też jest funkcją T-okresową: $f'(T) = f'(0)$, czyli

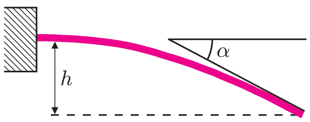
$$\sin 2T = a \sin 2aT = a \sin(\pm 2T + 2k\pi) = \pm a \sin 2T.$$

Zatem albo $a = \pm 1$ (liczba wymierna), albo $\sin 2T = 0$, skąd $2T = l\pi$ $(l \neq 0)$,

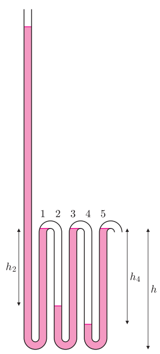
$$a = \frac{\pm 2T + 2k\pi}{2T} = \pm 1 + \frac{2k}{l} \qquad \text{(liczba wymierna).}$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2011



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 516, 517

Redaguje Jerzy B. BROJAN

516. Sprężyście zginający się jednorodny pręt o długości l i masie m zamocowano jednym końcem poziomo, a drugi zwisa pod wpływem siły ciężkości (rys. 1). Miarą sztywności pręta jest dany parametr k, będący stosunkiem momentu siły zginającej M do kąta α między stycznymi do końców pręta, gdy M ma wzdłuż niego stałą wartość. Obliczyć numerycznie zwis pręta h oraz kąt opadania jego końca α, przy następujących danych: $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $k = 1$ N·m/rad, przyspieszenie ziemskie g = 10 m/s^2.

Wskazówka: Obliczenia mogą być oparte na przedstawieniu pręta jako zespołu dużej liczby n sztywnych prętów o masach $m_1 = m/n$ i długościach $l_1 = l/n$, połączonych przegubami opisanymi przez współczynnik $k_1 = k \cdot n$.

517. Równoległa wiązka światła o natężeniu (tzn. mocy na jednostkę powierzchni prostopadłej) I_0 pada na kulkę o promieniu r ze szkła o współczynniku załamania n. W odległości $R \gg r$ od kulki znajduje się ekran prostopadły do wiązki padającej, ale oświetlony tylko przez światło przechodzące przez kulkę. Jeśli można pominąć efekty dyfrakcyjne i odbicie światła od szkła, to jakie jest natężenie światła padającego na środek ekranu?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2010

Przypominamy treść zadań:

508. Rurka składa się z pięciu pionowych segmentów wysokości $h = 1$ m i jednego segmentu dłuższego (rys. 2). Jeśli początkowo rurka nie zawierała wody, to do jakiej wysokości należy jej nalać do dłuższego segmentu, żeby zaczęła wyciekać drugim końcem? Średnica rurki jest znacznie mniejsza od h, ale na tyle duża, że przepływ wody i przepływ powietrza mogą w niej zachodzić niezależnie. Temperatura powietrza w rurce się nie zmienia, a ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 10^5$ Pa.

509. W zjawisku Comptona obserwuje się promieniowanie rentgenowskie rozproszone na swobodnych elektronach, przy czym zwykle zakłada się, że początkowo elektrony były nieruchome. Przyjmijmy, że rozproszenie następuje na elektronach w atomach wodoru, będących początkowo w stanie podstawowym. Ile wynosi poszerzenie zakresu długości fali promieniowania rozproszonego wstecz ($\theta = 180°$), wynikające z ruchu elektronów? Wystarczy wynik przybliżony oparty na modelu Bohra, dla długości fali promieniowania padającego równej $\lambda_0 = 0{,}1$ nm.

508. Po przelaniu przez górne kolanko 1-2 woda zamyka dolne kolanko 2-3 i odcina w segmencie 2 rurki słup powietrza o początkowej długości h (pomijamy objętość samego kolanka); później sytuacja się powtarza w segmencie 4. Wzrost poziomu wody w segmentach 3 i 5 powoduje sprężenie tych słupów powietrza – oznaczmy długości słupów po sprężeniu jako h_2 i h_4. Zatem ciśnienie powietrza w segmencie 4 wynosi $p_0 + \rho g h_4$ (gdzie p_0 - ciśnienie atmosferyczne), a w segmencie 2 – $p_0 + \rho g h_4 + \rho g h_2$. Zgodnie z równaniem przemiany izotermicznej

$$p_0 h = (p_0 + \rho g h_4) h_4 = (p_0 + \rho g h_4 + \rho g h_2) h_2$$

Obliczamy

$$h_4 = \frac{-p_0 + \sqrt{p_0^2 + 4 p_0 h \rho g}}{2 \rho g} = 91{,}8 \text{ cm},$$

podobnie $h_2 = 85{,}2$ cm.

Wysokość słupa w lewym segmencie powinna być równa co najmniej $h + h_2 + h_4 = 277$ cm (177 cm powyżej górnych kolanek).

Praktycznym przykładem opisanego tu problemu może być lanie wody wężem częściowo zwiniętym na bębnie. Na poziomie jakościowym było to tematem jednego z zadań Olimpiady Fizycznej w 1982/83 r.

509. Energia kwantu promieniowania o długości fali 0,1 nm wynosi 12 keV, czyli około 1000 razy więcej od energii wiązania elektronu. W bilansie energii pominiemy więc energię wiązania, gdyż nie zależy ona od ruchu elektronów i może powodować niewielką zmianę długości fali λ_1 rozproszonego promieniowania, ale nie rozmycie widma. Zasada zachowania energii wyraża się więc „zwykłym” równaniem

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda_1} + \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2},$$

gdzie p jest pędem elektronu wyrzuconego z atomu. Zasadę zachowania pędu zapiszemy natomiast w postaci jednowymiarowej

$$\frac{h}{\lambda_0} + \Delta p = -\frac{h}{\lambda_1} + p,$$

gdzie Δp jest początkowym pędem elektronu, a minus po prawej wynika z danej wartości kąta rozproszenia kwantów (180°). Jeśli elektron krążył po pierwszej orbicie Bohra, to zależnie od zwrotu jego ruchu mamy $\Delta p = \pm \frac{me^2}{2\varepsilon_0 h}$, co – jak łatwo sprawdzić – jest wielkością około trzykrotnie mniejszą od pędu fotonu. Do celów przybliżonej oceny możemy więc, podnosząc równanie stronami do kwadratu, pozostawić tylko wyraz liniowy w Δp i po wyeliminowaniu p otrzymujemy

$$mc(\lambda_1 - \lambda_0) = 2h + \Delta p(\lambda_1 + \lambda_0).$$

Wyznaczając stąd λ_1, warto pamiętać, że Δp jest wielokrotnie (137-krotnie) mniejsze od mc, a comptonowska długość fali elektronu $\lambda_c = h/mc$ jest równa $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m, czyli znacznie mniej od λ_0. W wyniku przekształceń znajdujemy

$$\lambda_1 \approx \lambda_0 + 2\lambda_c + 2\lambda_0 \frac{\Delta p}{mc}.$$

Ostatni człon po prawej stronie jest szukanym rozmyciem widma promieniowania rozproszonego. Jego liczbowa wartość wynosi $\pm 1{,}5 \cdot 10^{-12}$ m. W porównaniu z samym zwiększeniem długości fali równym $2\lambda_c = 4{,}8 \cdot 10^{-12}$ m jest to wielkość mniejsza, ale nie pomijalnie mała.