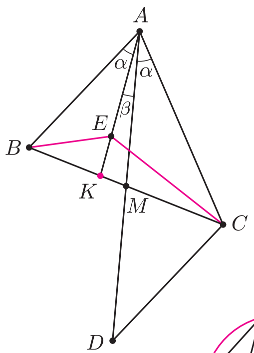
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

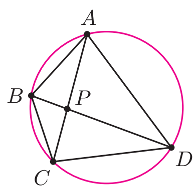
W roku szkolnym 2010/2011 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej jest organizatorem LXII edycji Olimpiady Matematycznej. Od września do grudnia 2010 roku uczestnicy Olimpiady Matematycznej zmagali się z dwunastoma zadaniami domowymi pierwszego etapu zawodów. Do jedenastu Komitetów Okręgowych OM w całym kraju przysłano do oceny prace 1557 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 605 uczestników. Omówimy jedno z zadań pierwszego etapu LXII OM.

Zadanie 8. *Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że $\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC$.*



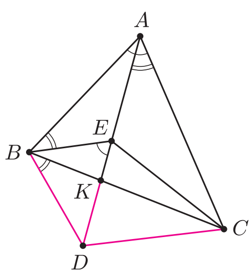
Rys. 1

Rozwiązanie. Załóżmy, że $AB < AC$. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAK$ oraz $\beta = \sphericalangle KAM$. Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (rys. 1). Z założenia $\sphericalangle BEK = 2\alpha + \beta$, więc $\sphericalangle EBA = \alpha + \beta$. Oznacza to, że $\triangle EBA \sim \triangle CDA$ i $\frac{AE}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{EB}{AB}$. Ponadto $\sphericalangle EBA = \alpha + \beta = \sphericalangle EAC$, co oznacza, że $\triangle EBA \sim \triangle EAC$. Stąd $\sphericalangle ACE = \alpha$ i $\sphericalangle KEC = \sphericalangle EAC + \sphericalangle ACE = 2\alpha + \beta$, co należało wykazać. Zauważamy jeszcze, że gdy $AB \geqslant AC$, rozumowanie jest analogiczne.



Rys. 2

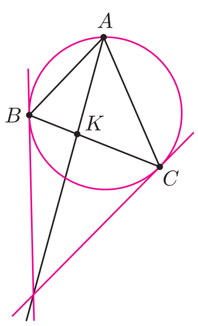
Z treści rozważanego zadania wynika, że prosta AK jest symedianą w $\triangle ABC$. Oznacza to, że prosta AK jest obrazem środkowej AM w symetrii osiowej względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. Przedstawimy poniżej dwa inne rozwiązania zadania 8 wykorzystujące własności symedian. Rozwiązania te nie są prostsze niż rozwiązanie już zaprezentowane, korzystają jednak z ciekawych faktów.



Rys. 3

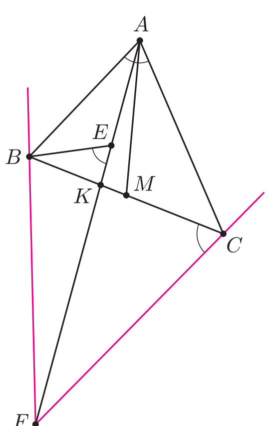
Fakt 1. *W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg przekątne przecinają się w punkcie P. Jeżeli AP jest symedianą w $\triangle ABD$, to CP jest symedianą w $\triangle BCD$, BP jest symedianą w $\triangle ABC$ oraz DP jest symedianą w $\triangle ADC$* (rys. 2).

Rozwiązanie zadania 8 oparte na fakcie 1. Niech D będzie punktem przecięcia prostej AK z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ różnym od punktu A (rys. 3). Wówczas $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Ponadto z założenia $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEK - \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$. Z faktu 1, BK jest symedianą w $\triangle ABD$. Równość $\sphericalangle KBD = \sphericalangle EBA$ oznacza, że BE jest środkową w $\triangle DBA$. Więc CE jest środkową w $\triangle ACD$ i $\sphericalangle ACE = \sphericalangle KCD$. Ponadto $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Ostatecznie $\sphericalangle KEC = \sphericalangle ECA + \sphericalangle EAC = \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC$.



Rys. 4

Fakt 2. *Jeżeli AK jest symedianą w $\triangle ABC$, to styczne do okręgu opisanego* na $\triangle ABC$ w punktach B i C oraz prosta AK są współpękowe (rys. 4).



Rys. 5

Rozwiązanie zadania 8 oparte na fakcie 2. Niech styczne do okręgu opisanego na $\triangle ABC$ w punktach B i C przecinają się w punkcie F (rys. 5). Z faktu 2 prosta AK, jako symediana w $\triangle ABC$, przechodzi przez F. Mamy zatem $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BAC$ z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną i cięciwą. Z założenia $\sphericalangle BAK = \sphericalangle BEF$, więc punkty B, E, C i F leżą na jednym okręgu. Z równości $BF = FC$ wynika, że $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FEC$, co jest tezą zadania.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej