



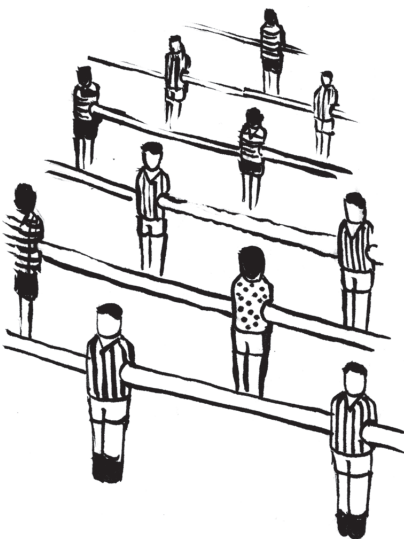
W praktyce zwykle każda para drużyn rozgrywa nie jeden, ale dwa mecze – jest runda rewanżowa.

O rozgrywkach ligowych

W sporcie stosowane są różne systemy prowadzenia rozgrywek. Jednym z nich jest tzw. *system pucharowy*, w którym zwycięzca meczu kwalifikuje się do dalszych gier, przegrany zaś odpada z turnieju. Aby system był bardziej sprawiedliwy, dokonuje się początkowego rozstawienia przeciwników, tak by teoretycznie najsilniejsi spotkali się jak najpóźniej.

Innym systemem, bardzo przydatnym, gdy nie mamy danego rankingu drużyn, jest tzw. *system kołowy*, bardziej znany po prostu jako *rozgrywki ligowe*. W systemie tym mamy n drużyn i każda rozgrywa mecz ze wszystkimi pozostałymi – dzięki temu jest to bardzo sprawiedliwy system. Łącznie mamy $n(n-1)/2$ meczów. Rozgrywki składają się z *kolejek*. Jeśli n jest parzyste, to w każdej kolejce uczestniczą wszystkie drużyny, a jeśli nieparzyste, to jedna drużyna pauzuje. Drugi przypadek możemy sprowadzić do pierwszego, dorzucając fikcyjną drużynę i interpretując pauzowanie jako wygrany z nią mecz. Każda drużyna musi rozegrać $n-1$ meczów, a więc liczba kolejek musi być równa co najmniej tyle. Jeśli spojrzymy na terminarze spotkań różnych lig, to zobaczymy, że składają się one właśnie z tylu kolejek. Ale dlaczego? Dlaczego zawsze udaje się tak ułożyć terminarz, aby nie zdarzyła się sytuacja, w której wypada, że dane dwie drużyny, które już grały ze sobą, teraz znowu miałyby na siebie trafić? Czy jest to możliwe dla dowolnej parzystej liczby drużyn?

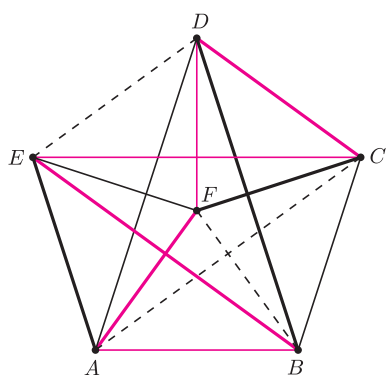
Popatrzmy na przykłady z życia. Czy jesteśmy w stanie znaleźć dla dowolnej (odpowiednio małej) parzystej wartości ligę o takiej liczbie drużyn? Poszukajmy wśród lig piłki nożnej:



- 2 – to dość trywialny przypadek – mecz pomiędzy dwiema drużynami, trudno to nawet nazwać ligą,
- 4 – przykładowo rozgrywki grupowe w finałach Mistrzostw Świata albo Europy, rozgrywki grupowe Ligi Mistrzów; bardzo często łączone z systemem pucharowym (najpierw faza grupowa, potem pucharowa),
- 6 – np. finałowa runda eliminacji do Mistrzostw Świata w strefie obejmującej Amerykę Północną i Środkową (*CONCACAF*), do niedawna taką wielkość miały grupy w rozgrywkach Ligi Europejskiej pod warunkiem, że pauzowanie interpretujemy jako mecz z fikcyjną drużyną (grupy w rzeczywistości liczyły po 5 drużyn),
- 8 – trudno znaleźć ligę o tej liczbie drużyn, ale liga polska w sezonie 2001/02 była podzielona na dwie grupy po 8 drużyn, z których następnie po cztery najlepsze drużyny wchodziły do *grupy mistrzowskiej*, a pozostałe do *grupy spadkowej*,
- 10 – np. liga austriacka, słoweńska, szwajcarska czy grupa eliminacyjna do Mistrzostw Świata w Ameryce Południowej (*CONMEBOL*),
- 12 – np. liga duńska, szkocka, słowacka,
- 14 – tyle drużyn liczyła liga polska w sezonach 2003/04 i 2004/05,
- 16 – typowa wielkość dla większości lig europejskich, np. liga belgijska, bułgarska, czeska, fińska, grecka, norweska, polska, portugalska, rosyjska,
- 18 – np. niemiecka *Bundesliga*, liga holenderska, rumuńska, turecka,
- 20 – typowa obecnie wielkość dla najlepszych lig europejskich, takich jak angielska *Premier League*, francuska *Ligue 1*, hiszpańska *Primera División*, włoska *Serie A*; również liga argentyńska czy brazylijska,
- 24 – np. angielska „druga liga” – *Championship*.

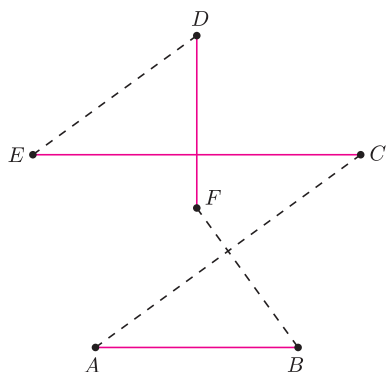
Dla wszystkich wymienionych lig, aby każda drużyna zagrała z każdą, wystarcza $n - 1$ kolejek. Skłania nas to do przypuszczenia, że dla dowolnej liczby parzystej n w lidze liczącej n drużyn zawsze da się tak ułożyć terminarz spotkań, żeby do rozegrania wszystkich meczów wystarczyło $n - 1$ kolejek.

Spróbujmy to przetłumaczyć na nieco inny język: przedstawimy rozgrywki jako graf. Wierzchołkami będą drużyny danej ligi (zakładamy, że liczba wierzchołków n jest parzysta), a krawędź łącząca dwa wierzchołki będzie oznaczała mecz między odpowiednimi drużynami. Każde dwie drużyny mają ze sobą grać, więc rysujemy wszystkie możliwe krawędzie – taki graf to *graf pełny* albo *klika* o n wierzchołkach. Będziemy kolorować krawędzie naszego grafu $n - 1$ kolorami. Kolory oznaczają kolejki, w których odbywają się mecze. Chcemy tak pokolorować krawędzie, aby z każdego wierzchołka wychodziła krawędź każdego koloru i każdym kolorem było pokolorowane $n/2$ krawędzi. Jeśli to się uda, to fachowo mówimy, że *graf pełny (klika) o n wierzchołkach rozkłada się na $n - 1$ doskonałych skojarzeń*.



Rys. 1

Jak wykazać, że dla dowolnej liczby parzystej n można tak pokolorować krawędzie grafu pełnego? Okazuje się, że można to zrobić w bardzo sprytny i przejrzysty sposób. Co więcej, będzie to sposób konstruktywny! Umieścimy mianowicie $n - 1$ drużyn w wierzchołkach $(n - 1)$ -kąta foremnego, a ostatnią w jego środku, tak jak na rysunku 1 (zamiast różnych kolorów są różne rodzaje linii). Teraz sprawa jest dosyć prosta: wybieramy dowolny kolor, malujemy nim dowolną jeszcze niepomalowaną krawędź łączącą drużynę w środku z którąś z drużyn w wierzchołkach $(n - 1)$ -kąta i następnie tym kolorem malujemy wszystkie przekątne $(n - 1)$ -kąta prostopadłe do danej krawędzi. Na rysunku 2 widać dwa początkowe etapy kolorowania. Ponieważ liczba $n - 1$ jest nieparzysta, to każda z wybranych krawędzi łączących środek z wierzchołkiem $(n - 1)$ -kąta jest zawarta w jego osi symetrii, a każda z $\frac{n-2}{2}$ przekątnych łączących wierzchołek z jego obrazem symetrycznym jest prostopadła do tej krawędzi (i nie jest prostopadła do żadnej innej krawędzi łączącej środek z wierzchołkiem $(n - 1)$ -kąta). W każdym kroku kolorujemy więc $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ krawędzi naszego grafu.



Rys. 2

Gdy byłem małym chłopcem, czyli we wczesnej podstawówce, bardzo interesowałem się piłką nożną i lubiłem tworzyć własne rozgrywki ligowe. Najpierw, oczywiście, trzeba było ułożyć terminarz spotkań. Liga polska liczyła wówczas 18 drużyn, a ja, rzecz jasna, nie znałem opisanego przed chwilą sposobu. A proste przepisanie terminarza ligi polskiej (i podmiana nazw drużyn) nie wchodziło w grę, bo w tamtych czasach zwyczajnie nie bardzo można było ten terminarz znaleźć (chyba że kolekcjonując gazety z całego sezonu – dziś wystarczyłoby kupić *Skarb kibica*, włączyć telegazetę lub wejść do Internetu). Nie byłem więc w stanie ułożyć terminarza dla ligi 18-drużynowej, ale za to wymyśliłem sprytny sposób na ułożenie terminarza dla ligi liczącej 16 drużyn (i tyle liczyły „moje” ligi).

Ułożyć terminarz dla ligi liczącej 4 drużyny jest łatwo – podzielmy więc naszą ligę na cztery grupy po cztery drużyny. Nazwijmy je A, B, C, D. Przez pierwsze trzy kolejki drużyny z poszczególnych grup grają między sobą. Co dalej? Teraz naszą ligę możemy potraktować po prostu jako ligę złożoną z czterech „drużyn” A, B, C, D. Mecz pomiędzy „drużynami” A i B trwa przez cztery kolejki i polega na tym, że każda drużyna z A gra z każdą z B (znowu jest to bardzo łatwe do zrealizowania). Zatem w kolejkach 4–7 mamy mecze A–B, C–D, w kolejkach 8–11 mecze A–C, B–D, a w 12–15 mecze A–D, B–C. I terminarz gotowy.

Na koniec powstaje pytanie: jeśli mamy ułożony terminarz, albo inaczej, kolorowanie grafu, to czy można tak rozmieścić jego wierzchołki, aby to kolorowanie było identyczne z opisaną wyżej konstrukcją? Innymi słowy, czy ten sposób układania jest jedyny z dokładnością do kolejności kolejek i układu drużyn? Może Czytelnik potrafi odpowiedzieć na to pytanie?

Małą Deltę przygotował Michał KIEZA

Jak Czytelnik Wnikliwy zapewne zauważy, tą metodą można ułożyć terminarz spotkań dla dowolnej ligi o liczbie drużyn będącej potęgą dwójki.