Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 617, 618

Redaguje Marcin E. KUCZMA

617. Znaleźć wszystkie funkcje F, określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m+2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geqslant 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C, a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A. Punkt Q jest środkiem odcinka BP. Wykazać, że $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ$.

Zadanie 618 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2010

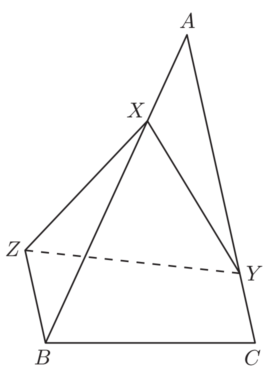
Przypominamy treść zadań:

609. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB jest najdłuższy. Na bokach AB i AC zaznaczono odpowiednio punkty X i Y tak, że $|AY| = |BX|$. Wykazać, że $2 \cdot |XY| > |BC|$.

610. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$,

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Dowieść, że żaden wyraz tego ciągu nie ma dzielnika dodatniego postaci $8k+5$.



609. Na odcinku BX, po zewnętrznej stronie trójkąta ABC, budujemy trójkąt BXZ przystający do AYX (tak, że $|BZ| = |AX|$, $|XZ| = |YX|$). W tych trójkątach kąty przy wierzchołkach B i A są równe, wobec czego $BZ \parallel CA$. Zatem kąt CBZ jest rozwarty.

Skoro $|AB| > |AC|$, to $|BZ| = |AX| > |CY|$. Stąd i z rozwartości kąta CBZ wnosimy, patrząc na trapez $ZBCY$, że

$$|BC| < |YZ| \leqslant |YX| + |XZ| = 2 \cdot |XY|.$$

610. Określamy parę ciągów (a_n), (b_n) wzorami: $a_1 = b_1 = 1$,

$$(1) \qquad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \qquad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Wówczas $a_2 = 3$ oraz

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + 2a_n + (a_{n+1} - a_n) = \\ = 2a_{n+1} + a_n,$$

co pokazuje, że (a_n) jest ciągiem danym w zadaniu. Ze wzorów (1) dostajemy równość

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2);$$

a ponieważ $a_1^2 - 2b_1^2 = -1$, wynika stąd, że $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Ustalmy n. Widać, że a_n jest liczbą nieparzystą. Niech $p = 2m+1$ będzie jej dowolnym dzielnikiem pierwszym. Dostajemy zależność

$$2b_n^2 \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}.$$

Po podniesieniu do potęgi m (i skorzystaniu z małego twierdzenia Fermata: $b_n^{2m} \equiv 1$),

$$(2) \qquad 2^m \equiv (-1)^{m(n+1)} \pmod{p}.$$

Za chwilę wykażemy, że jednocześnie

$$(3) \qquad 2^m \equiv (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}.$$

Równość (mod p) prawych stron (2) i (3) oznacza, że

(4) liczby $m(n+1)$ oraz $\lceil m/2 \rceil$ są jednakowej parzystości.

Dla n parzystego warunek (4) mówi, że $m = 4k$ lub $m = 4k+1$ dla pewnego k; zatem $p = 8k+1$ lub $p = 8k+3$. Każdy dzielnik pierwszy liczby a_n ma więc taką postać. Dowolny dzielnik dodatni (jako iloczyn pewnej liczby dzielników pierwszych) wtedy też jest tej postaci.

Dla n nieparzystego warunek (4) implikuje $m = 4k$ lub $m = 4k+3$, czyli $p = 8k+1$ lub $p = 8k+7$. I znów, dowolny iloczyn takich liczb też jest liczbą tej postaci. W obu przypadkach liczby postaci $8k+5$ nie mogą być dzielnikami liczby a_n.

Pozostaje udowodnić wzór (3). Przyjmijmy (dla ustalonego m) oznaczenia:

A = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,
B = iloczyn wszystkich liczb nieparzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,
C = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle m+1; 2m \rangle$.

Iloczyn B liczy $\lceil m/2 \rceil$ czynników. Łączymy je z czynnikami iloczynu C w pary o sumie $2m+1$ (czyli p). Otrzymujemy związek $C \equiv B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}$. Stąd

$$2^m m! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m) = A \cdot C \equiv A \cdot B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} = \\ = (-1)^{\lceil m/2 \rceil} m! \pmod{p}.$$

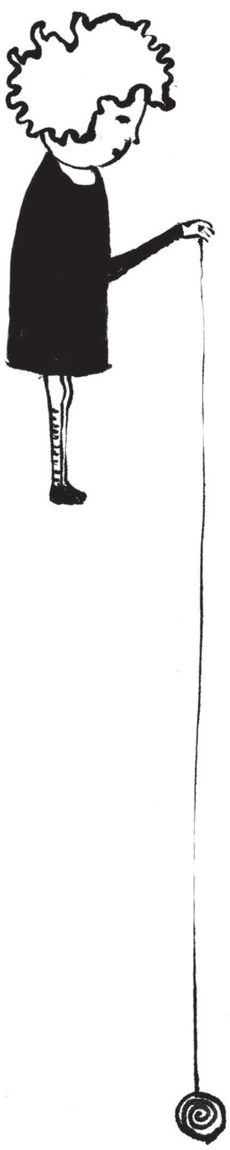
Wystarczy teraz podzielić przez czynnik $m!$ (względnie pierwszy z p), by uzyskać wzór (3) i zakończyć rozwiązanie.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
502 ($WT = 1{,}00$) i 503 ($WT = 3{,}55$)
z numeru 9/2010

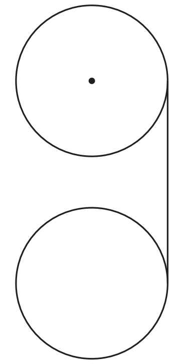
Jacek Piotrowski	Rzeszów	37,13
Jerzy Witkowski	Radlin	33,82
Tomasz Rudny	Warszawa	32,65
Andrzej Idzik	Bolesławiec	26,47
Tomasz Wietecha	Tarnów	25,39



Zadania z fizyki nr 514, 515

Redaguje Jerzy B. BROJAN

514. Jednorodny krążek (blok) może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi, oznaczonej na rysunku 1 kropką. Drugi taki sam krążek jest połączony z pierwszym nawiniętą na nie nitką. Z jakim przyspieszeniem spada dolny krążek?



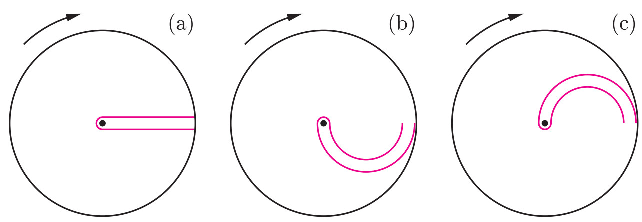
Rys. 1

515. Zbiornik zawierający $n = 100$ moli gazu doskonałego o temperaturze $T_1 = 400$ K i pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa znajduje się w otoczeniu powietrza atmosferycznego o temperaturze $T_0 = 290$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć maksymalną pracę, którą może wykonać zespół gaz + otoczenie (zarówno bezpośrednio, jak za pośrednictwem maszyn cieplnych). Ciepło molowe gazu przy stałej objętości jest równe $C_V = \frac{5}{2}R$.

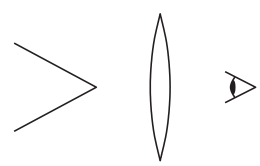
Rozwiązania zadań z numeru 11/2010

Przypominamy treść zadań:

506. Pozioma płytka kołowa o promieniu r i momencie bezwładności I obraca się wokół swojej osi bez tarcia. Jej początkowa prędkość kątowa to ω_0. W płytce jest rowek, a w rowku – kulka o masie m, która może się w nim toczyć bez tarcia. Kulka początkowo znajdowała się w środku płytki, a pod wpływem bardzo słabego impulsu zaczęła się toczyć na zewnątrz i spadła z płytki. Ile wynosiła końcowa prędkość kątowa płytki ω_1? Rozważyć trzy przypadki – gdy rowek biegnie prosto wzdłuż promienia (rys. 2(a)) i gdy ma kształt półokręgu (rys. 2(b) i (c)).



Rys. 2



Rys. 3

507. W soczewce skupiającej o ogniskowej f widzimy obraz pozorny stożka, którego oś pokrywa się z osią soczewki (rys. 3). Kąt rozwarcia stożka wynosi 2α, a jego wierzchołek jest odległy od soczewki o x. Ile wynosi kąt rozwarcia obrazu stożka 2β?

506. W przypadku (a) składowa okrężna (prostopadła do promienia) prędkości kulki wynikała tylko z obrotu płytki i w chwili stoczenia się z płytki wynosiła $\omega_1 r$. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu

$$I\omega_0 = I\omega_1 + m\omega_1 r^2, \quad \text{czyli } \omega_1 = \frac{I\omega_0}{I + mr^2}.$$

W przypadkach (b) i (c) prędkość kulki w chwili stoczenia nie jest wprost powiązana z ω_1. Oznaczmy ją v_1; zauważmy też, że składowa radialna prędkości wtedy nie występuje. Można więc skorzystać zarówno z zasady zachowania momentu pędu, jak i z zasady zachowania energii:

$$I\omega_0 = I\omega_1 + mv_1 r, \quad \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Równania te mają dwa rozwiązania: banalne rozwiązanie $\omega_1 = \omega_0$ (wtedy $v_1 = 0$), oraz „niebanalne”

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{I - mr^2}{I + mr^2} \quad \left(\text{wtedy } v_1 = 2\omega_0 r \frac{I}{I + mr^2}\right).$$

Rozwiązanie „banalne” odpowiada przypadkowi (b), a „niebanalne” – przypadkowi (c).

507. Promień biegnący wzdłuż tworzącej stożka można uważać za wybiegający ze wszystkich punktów tej półprostej, zatem po załamaniu pobiegnie tak, jakby wybiegał ze wszystkich punktów jej obrazu. Stąd wynika, że jego przedłużenie tworzy z osią soczewki kąt β. Oznaczmy przez h wysokość, na której następuje załamanie tego promienia, a przez y odległość obrazu wierzchołka stożka od soczewki. Z równań

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{y}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

znajdujemy rozwiązanie

$$\operatorname{tg}\beta = \left(1 - \frac{x}{f}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$