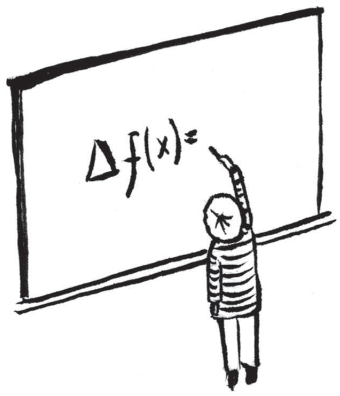
Jak obliczać sumy potęg za pomocą rachunku różnicowego?

Autor jest finalistą XXVII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra 2010.

Hubert WÓJTOWICZ



Jak wiadomo, pochodna opisuje zmiany danej wielkości (np. tak działa prędkościomierz w samochodzie). Z kolei całka opisuje sytuację odwrotną – odtwarza daną wielkość z jej zmienności (tak np. działa licznik energii elektrycznej). Można sobie wyobrazić, że urządzenia obliczające pochodną czy całkę nie działają w sposób ciągły, lecz skokowo. Wówczas możemy odpowiednik pochodnej nazwać *różnicą* i zdefiniować jako

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Bez trudu można przekonać się, że prawdziwe są następujące zależności

$$\Delta(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x), \qquad \Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x),$$

skąd – wobec oczywistego $\Delta c = 0$ dla dowolnej stałej c – mamy np.

$$\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x).$$

Znający rachunek różniczkowy widzą, że wzory te są dokładnymi odpowiednikami wzorów dla pochodnej.

Z kolei odpowiednik całki będziemy nazywali *antyróżnicą* lub *sumowaniem* i oznaczali $\mathfrak{S}f(x)$. Zatem

$$\mathfrak{S}f(x) = g(x) + c \Longleftrightarrow f(x) = \Delta g(x).$$

I tutaj można wypisać wiele wzorów analogicznych do występujących w rachunku całkowym. Np. odpowiednik wynikającej ze wzorów wypisanych wyżej zależności

$$\mathfrak{S}(f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) - \mathfrak{S}(g(x+1)\Delta f(x))$$

nazywany jest całkowaniem przez części – tu nazwiemy go sumowaniem przez części. Podobnie też, jak w rachunku całkowym, wprowadzimy *sumowanie oznaczone* $\mathfrak{S}_a^b$ określone przez warunek:

$$\text{jeśli } \mathfrak{S}f(x) = g(x), \text{ to } \mathfrak{S}_a^b f(x) = g(b) - g(a).$$

Więcej o rachunku różnicowym i jego zastosowaniach można się dowiedzieć z książki R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 2002.
W książce tej sumowanie oznaczane jest symbolem $\sum f(x)\delta x$, co naśladuje symbolikę rachunku całkowego. Tutaj symbol ten został zmieniony, bo znak $\sum$ występuje też w zupełnie innym znaczeniu, a wszystkie używane funkcje są jednoargumentowe.
Jest też różnica w oznaczeniu zakresów sumowania oznaczonego: mamy

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \mathfrak{S}_a^b f(x).$$

Poza zaciekawiającą analogią do pochodnych i całek wprowadzone pojęcia mają szereg interesujących zastosowań. Tu zajmiemy się jednym z nich – wykorzystamy je do obliczenia dla danego m sumy dowolnie wielu m-tych potęg kolejnych liczb naturalnych, poczynając od 1.

Do tego celu potrzebne nam będą tzw. liczby Stirlinga II rodzaju, które będziemy oznaczali $S(n,k)$. Liczby te mówią, na ile sposobów można podzielić n-elementowy zbiór na k niepustych, rozłącznych podzbiorów. Liczby Stirlinga spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$S(n,k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k > n \vee (k = 0 \wedge n > 0), \\ 1 & \text{gdy } k = n, \\ k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1) & \text{gdy } 0 < k < n. \end{cases}$$

Ten wzór w przypadku $0 < k < n$ można objaśnić, gdy zauważymy, że dzieląc zbiór n-elementowy na k niepustych podzbiorów, tworzymy z jednego z n elementów zbiór jednoelementowy (co można zrobić na $S(n-1,k-1)$ sposobów) lub umieszczamy go (na jeden z k sposobów) w jednym ze zbiorów, do których będziemy jeszcze dokładać elementy (na $S(n-1,k)$ sposobów).

Potrzebne nam też będą jeszcze pewne modyfikacje pojęcia potęgi. *Potęgę kroczącą* zdefiniujemy w następujący sposób:

$$x^{\underline{m}} = \begin{cases} x(x-1)\ldots(x-m+1) & \text{dla } m \in \mathbb{Z}_+, \\ 1 & \text{dla } m = 0, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+|m|)} & \text{dla } m \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\Delta x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}.$$

Okazuje się, że zróżnicowana potęga krocząca zachowuje się analogicznie do zróżniczkowanej zwykłej potęgi.

Warto odnotować, że

$$\Delta \frac{x^{\underline{m}}}{m} = x^{\underline{m-1}},$$

czego wygodniej nam będzie używać, gdy $m \neq 0$ zastąpimy przez $k+1$

$$\Delta \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} = x^{\underline{k}}.$$

Rozwiązanie zadania M 1308.
Zauważmy, że dla $x \in [-2,2]$ możemy napisać $x = 2\cos\varphi$. Wtedy $f(x) = 2\cos 3\varphi$ i ogólnie $f_n(x) = 2\cos 3^n\varphi$. To oznacza, że $f_n(x) = 0$ dla $x = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 3^n}$. Ponieważ funkcja cos jest malejąca w przedziale $(0,\pi)$, więc pierwiastki otrzymane dla $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$ będą różne, a więcej pierwiastków f_n mieć nie może.

Wykorzystując definicję antyróżnicy, otrzymujemy wzór na sumowanie:

$$\mathfrak{S}x^{\underline{k}} = \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1.$$

Musimy jeszcze zastanowić się, czy istnieje taka funkcja $f(x)$, że

$$\Delta f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}.$$

Łatwo można się zorientować, że jest nią

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

Zatem łącznie mamy (z dokładnością do stałej)

$$\mathfrak{S}x^{\underline{m}} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} & \text{dla } m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x} & \text{dla } m = -1. \end{cases}$$

Wprowadziliśmy pojęcia potęgi kroczącej i liczb Stirlinga II rodzaju, ale jak to połączyć z obliczaniem sumy $\sum_{k=0}^{n-1} k^m$? Okazuje się, że przydatne jest następujące twierdzenie

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić indukcyjnie, opierając się na wzorze rekurencyjnym na $S(n,k)$.

Teraz już obliczanie sumy potęg przebiega sprawnie. Oto przykład: kolejno obliczamy

$$x^4 = \sum_{m=0}^{4} S(4,m)x^{\underline{m}} = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

I ostatecznie

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \sum_{k=0}^{n-1} (k^{\underline{4}} + 6k^{\underline{3}} + 7k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}) = \mathfrak{S}_0^n x^{\underline{4}} + 6\mathfrak{S}_0^n x^{\underline{3}} + 7\mathfrak{S}_0^n x^{\underline{2}} + \mathfrak{S}_0^n x^{\underline{1}} =$$
$$= \frac{n^{\underline{5}}}{5} + 6\frac{n^{\underline{4}}}{4} + 7\frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Kącik przestrzenny (7)

Zejdźmy na ziemię

Czasami, gdy zbytnio bujamy w obłokach, słyszymy od innych *zejdź na ziemię!* Kto by pomyślał, że ta zazwyczaj dość nieprzyjemna uwaga może być niekiedy cenną wskazówką do zadań ze stereometrii. Zdarza się bowiem, że rozwiązując problem przestrzenny, nie wiemy, jak się do niego zabrać, natomiast widzimy, że można sformułować analogiczne zadanie na płaszczyźnie. Czasem rozwiązanie takiego zadania na płaszczyźnie może nam podpowiedzieć, co zrobić w przestrzeni.

1. (OM 52-III-2) *Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi* 1 *od jego wierzchołków jest nie większa niż* 3.

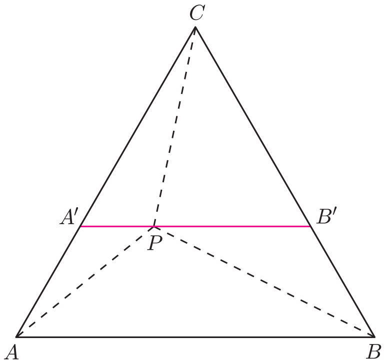
Nietrudno zauważyć, że wierzchołki realizują maksimum, a intuicja podpowiada nam, że pewnie tylko one. Spróbujmy więc sformułować, a następnie rozwiązać, analogiczne zadanie na płaszczyźnie:

Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku a od jego wierzchołków jest nie większa niż $2a$.

Niech A' i B' będą punktami przecięcia prostej równoległej do AB i przechodzącej przez punkt P odpowiednio z bokami AC i BC. Trójkąt $A'B'C$ jest równoboczny i $CP \leqslant A'B'$. Ponadto stosując nierówność trójkąta, dostaniemy $AP \leqslant AA' + A'P$ oraz $BP \leqslant BB' + B'P$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy

$$AP + BP + CP \leqslant AA' + A'P + BB' + B'P + A'B' = 2a.$$

Nietrudno też przekonać się, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P jest jednym z wierzchołków trójkąta ABC.



Rys. 1

Przejdźmy do sytuacji trójwymiarowej. Przyjmijmy, że P leży wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi 1. Wykorzystajmy naszą wiedzę