# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2011

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

## Zadania z fizyki nr 512, 513

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**512.** Dwóch studentów przechadzało się nad brzegiem stawu. W mętnej wodzie podskakiwała szyjka butelki wrzuconej przez jakiegoś wandala.

– Założę się o dychę, że potrafię obliczyć średnią głębokość zanurzenia tej butelki – powiedział Fizyk.

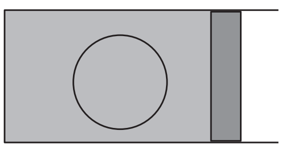
– Ściemniasz, przecież nic nie widać w tej zupie! – zaoponował Humanista. – Przyjmuję zakład!

Fizyk ustawił funkcję stopera na swoim zegarku i zmierzył czas 10 okresów drgań butelki – wyszło mu 7,8 sekundy. Przestawił zegarek na kalkulator i po paru obliczeniach zawołał:

– Piętnaście centymetrów, sprawdzamy i jesteś do tyłu o dychę!

Który student wygrał zakład?

**513.** W cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się powietrze, w którym unosi się bańka mydlana (rys. 1). Przesunięto tłok, sprężając powietrze. Jeśli przepływy ciepła można pominąć (przemiana adiabatyczna), to mocniej ogrzało się powietrze wewnątrz bańki, czy na zewnątrz niej, czy jednakowo?



Rys. 1

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2010

Przypominamy treść zadań:

**504.** Lokomotywa jadąca po prostym torze ze stałą prędkością 180 km/h gwiżdże, wydając ton o częstotliwości 1000 Hz. W odległości 300 m od toru stoi krowa. Ile wyniesie częstotliwość tonu słyszanego przez krowę w momencie, gdy lokomotywa zbliży się do niej na odległość 500 m? Prędkość dźwięku w powietrzu ma wartość 340 m/s.

**505.** Obliczyć siłę rozciągającą kołową pętlę o promieniu 10 cm równomiernie naładowaną ładunkiem 10 μC. Pozostałe niezbędne dane ocenić orientacyjnie. Pętla jest wykonana z drutu.

**504.** Oznaczmy dane (wg kolejności w treści zadania) jako $v, f, d, s, v_d$. Jeśli od wysłania dźwięku do jego dotarcia do krowy upływa czas $t$, to droga dźwięku wynosi $v_d t$, a droga lokomotywy – $vt$. Z odpowiedniego rysunku wynika równanie

$$(vt + \sqrt{s^2 - d^2})^2 + d^2 = (v_d t)^2,$$

którego rozwiązanie zapiszemy tylko w postaci liczbowej: $t = 1{,}674$ s. Rzut prędkości lokomotywy na kierunek „do krowy” miał w chwili wysłania dźwięku wartość

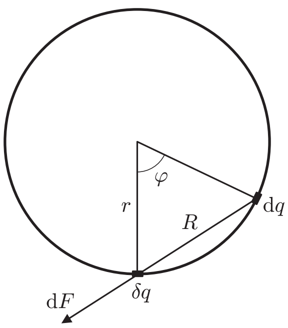
$$v_a = v\frac{vt + \sqrt{s^2 - d^2}}{v_d t} = 42{,}49 \text{ m/s},$$

co po podstawieniu do wzoru na efekt Dopplera daje wynik

$$f_{\text{odb}} = f\frac{v_d}{v_d - v_a} = 1143 \text{ Hz}.$$

**505.** Siła $\delta F$ działająca na mały fragment pętli o ładunku $\delta q$ ze strony wszystkich pozostałych może być obliczona jako suma sił opisanych wzorem

$$\mathrm{d}F = k\frac{\delta q\,\mathrm{d}q}{R^2} = k\frac{\delta q\,\mathrm{d}q}{(2r\sin(\varphi/2))^2},$$




Rys. 2

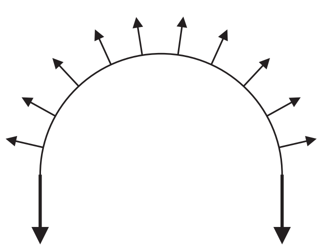
gdzie symbole zostały opisane na rysunku 2. Rzut wektora $\mathrm{d}F$ na kierunek promienia ma wartość

$$\mathrm{d}F' = \mathrm{d}F\cdot\sin(\varphi/2) = k\frac{\delta q\,\mathrm{d}q}{4r^2\sin(\varphi/2)}.$$

Jeśli siłę $\delta F$ spróbujemy obliczyć jako całkę (podstawiając $\mathrm{d}q = \frac{q}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$), to napotykamy rozbieżność typu logarytmicznego

$$\delta F = \int \mathrm{d}F' = \frac{kq\,\delta q}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin(\varphi/2)}.$$

Źródłem kłopotów jest nieuwzględnienie grubości drutu $r_d$, która ma znaczenie dla tych jego fragmentów, które są bardzo bliskie elementu wyróżnionego. Ograniczenie siły oddziaływania na odległości rzędu $r_d$ oznacza przyjęcie dolnej granicy całkowania równej około $r_d/r$ (zamiast zera), czyli całka wyjdzie równa $2\ln(4r/r_d)$.



Rys. 3

Aby wyznaczyć naprężenie $N$ pętli, można rozważyć siły działające na jedną jej połówkę. Spójrzmy na rysunek 3 – widać, że suma rzutów sił $\delta F$ na oś symetrii tej połówki (czyli całka z wyrażenia $\delta F\cdot\cos\theta$ w granicach od $\theta = -\pi/2$

do $\theta = +\pi/2$) jest równoważona przez dwie siły $N$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\delta F}{\delta\theta} \cos\theta\,\delta\theta = \frac{\delta F}{\delta q}\,\frac{q}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\delta\theta = \\ = \frac{kq^2}{4\pi^2 r^2} \ln\left(\frac{4r}{r_d}\right) \cdot 2 = 2N.$$

Po podstawieniu danych z treści zadania otrzymujemy $N = 2{,}28\,\mathrm{N} \cdot \ln(4r/r_d)$, czyli np. dla drutu o średnicy 2 mm mamy $N \approx 14$ N, a dla drutu o średnicy 0,2 mm wychodzi $N \approx 19$ N. Jak widać, zależność wyniku od grubości drutu nie jest bardzo silna, jednak ma istotne znaczenie. Efekt ten uwzględniliśmy tylko orientacyjnie.

* * *

Pięćset zadań stuknęło fizycznej lidze w *Delcie*! To znaczy, 25 lat (uwzględniając przerwy wakacyjne), srebrny jubileusz! Oto dobry moment na dokonanie bilansu. W ciągu tego ćwierćwiecza rejestr odnotował około 290 uczestników, z tego jednak około 100 wzięło udział tylko w pierwszych 25 seriach (2,5 roku), a potem, gdy początkowy entuzjazm stopniał i liczba korespondentów zmalała, zawiesiło aktywność. Członkami Klubu zostały 33 osoby, w tym jedna Pani – Anna Gluza z Torunia. (Czy wciąż mieszka w Toruniu i czy nosi to samo nazwisko? Ileż mogło się zmienić po tylu latach! Ale wróćmy do tematu.) Dziewięciu mamy Weteranów, peleton prowadzi Andrzej Idzik z Bolesławca na Dolnym Śląsku, mając na koncie 9 razy 44 punkty, czyli trzykrotną normę weterańską. Za nim mknie Tomasz Wietecha z Tarnowa (7 rund), który drugie miejsce kompensuje sobie z nawiązką dzięki ośmiokrotnemu zaliczeniu normy w klubie matematycznym. Przy okazji, porównanie z ligą matematyczną wypada z grubsza jak 1 do 3 zarówno co do comiesięcznej liczby listów, jak i co do liczby członków klubu. Nie da się ukryć, że jesteśmy „młodszymi braćmi” Klubu 44 M – ale jeśli ktoś woli, może uznać naszą ligę za bardziej elitarną…

Obok grupy mniej lub bardziej stałych uczestników mamy też korespondentów okazjonalnych, przysyłających rozwiązania w sporych odstępach czasu. Rekord długości takiej przerwy padł niedawno: 18 lat! Trudno powiedzieć, czy prowadzący rubrykę bardziej cieszy się z udziału starych znajomych, czy z „powrotu syna marnotrawnego” po kilku- lub kilkunastoletniej pauzie. To drugie pozwala przypuszczać, że przez cały ten czas pozostawał naszym Czytelnikiem, a tylko inne obowiązki nie pozwalały na udział w naszej zabawie.

Przypominamy o możliwości przysyłania projektów zadań przez uczestników ligi, co w przypadku akceptacji punktowane jest – zgodnie z regulaminem – na równi z poprawnym rozwiązaniem. Czekamy zwłaszcza na pomysły oryginalne i zabawne!

A teraz zobaczmy, co ciekawego nadeszło z listami naszych Czytelników w ciągu ostatniego roku.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po 501 zadaniach

| | |
|---|---|
| Jacek Piotrowski (Rzeszów) | 1–37,13 |
| Marian Łupieżowiec (Gliwice) | 36,55 |
| Tomasz Rudny (Warszawa) | 32,65 |
| Andrzej Nowogrodzki (Chocianów) | 2–30,57 |
| Jerzy Witkowski (Radlin) | 2–31,75 |
| Dariusz Wilk (Rzeszów) | 26,57 |
| Andrzej Idzik (Bolesławiec) | 9–26,47 |
| Tomasz Wietecha (Tarnów) | 7–24,39 |
| Radosław Poleski (Kołobrzeg) | 23,47 |
| Ryszard Woźniak (Kraków) | 16,05 |

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2008–2010 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 15 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (9), T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Witkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Koźlik, M. Łącki, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Zadanie **487** [Pręt zawieszony w środku kołysze się w polu Ziemi wokół pionowego położenia równowagi] (współczynnik trudności $WT = 2{,}73$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 2$). „Zupełnie poprawnych” rozwiązań właściwie nie było, ale dwóch Klubowiczów prawidłowo przedstawiło dwa istotne elementy problemu: p. **T. Wietecha** uporał się z kierunkami sił działających na końce, a p. **J. Witkowski** – z niezależnością wyniku od długości i masy pręta oraz jej konsekwencją (możliwością uogólnienia wyniku na pręt jednorodny). Kompletne rozwiązanie wymagałoby tylko połączenia tych elementów – ale nie namawiamy Czytelników do zakładania spółdzielni…

Zadanie **490** [Dlaczego po zamieszaniu herbaty fusy zbierają się w środku dna szklanki?] ($WT = 1{,}95$, $LPR = 4$). Jak się okazało, problem był analizowany w dostępnych źródłach: p. **A. Idzik** znalazł go w zbiorku Słobodeckiego i Asłamazowa, a p. **T. Wietecha** odwołał się do fachowych prac inżynierskich na temat stożka osadu, wcześniej będącego przedmiotem rozważań Alberta Einsteina – ni mniej, ni więcej! Rozwiązania niezależne nadesłali p. **K. Magiera** i p. **M. Koźlik**.

Zadanie **497** [Ogrzewanie gazu w cyklu przemian nieodwracalnych] ($WT = 3{,}28$, $LPR = 2$). Punkty (a) (źródłem nieodwracalności jest przepływ ciepła i wyrównanie temperatury) oraz (c) (wyrównanie temperatury i ciśnienia) prawidłowo rozwiązali **M. Koźlik** i **A. Idzik**, natomiast nietypowy punkt (b) (wyrównanie tylko ciśnienia, wskutek przepływu przez wąską rurkę) okazał się trudny, zgodnie zresztą z oczekiwaniami autora. Niektóre z nadesłanych wyników były wręcz zdumiewające: oto nieodwracalny cykliczny proces wyrównywania ciśnień miałby prowadzić do *obniżenia* temperatury gazu, w jawnej sprzeczności zarówno z I, jak i II zasadą termodynamiki! Towarzyszące w parze zadanie **496** [Obwód z woltomierzem o skończonym oporze własnym] ($WT = 1{,}00$, $LPR = 10$) spełniło rolę „damy do towarzystwa”, bo osiągnęło rekord łatwości.

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2011

## Zadania z matematyki nr 615, 616

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**615.** Każdemu podzbiorowi $B$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, który nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, przyporządkowujemy liczbę $p(B)$, będącą iloczynem liczb w zbiorze $B$ (dla zbioru pustego przyjmujemy $p(\emptyset) = 1$). Obliczyć sumę kwadratów wszystkich uzyskanych liczb $p(B)$.

**616.** Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich $x, y, z$:

$$\frac{(y+z)^2}{x^2+yz} + \frac{(z+x)^2}{y^2+zx} + \frac{(x+y)^2}{z^2+xy} \geqslant 6.$$

Zadanie 616 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Lista uczestników ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 603 ($WT = 1{,}88$) i 604 ($WT = 1{,}81$) z numeru 6/2010

| | |
|---|---|
| Franciszek S. Sikorski | 45,98 |
| Janusz Olszewski | 11–45,63 |
| Tomasz Warszawski | 2–42,26 |
| Bartłomiej Dyda | 4–41,03 |
| Piotr Kumor | 10–40,19 |
| Michał Kieza | 3–36,46 |
| Łukasz Garncarek | 1–33,48 |
| Jerzy Cisło | 7–32,86 |
| Zbigniew Skalik | 1–32,27 |
| Jan Czardybon | 30,48 |
| Andrzej Daniluk | 2–29,74 |
| Andrzej Dorobisz | 29,11 |
| Paweł Najman | 4–28,96 |
| Paweł Kubit | 4–28,93 |
| Jacek Jendrej | 27,67 |
| Joachim Jelisiejew | 27,50 |
| Joanna Bogdanowicz | 26,02 |
| Piotr Sobczak | 25,18 |
| Zbigniew Sewartowski | 1–24,03 |
| Tomasz Tkocz | 2–23,77 |
| Wojciech Świeboda | 23,15 |
| Paweł Łabędzki | 23,04 |
| Roksana Słowik | 22,99 |
| Adam Dzedzej | 1–22,72 |
| Krzysztof Dorobisz | 3–22,64 |
| Tomasz Choczewski | 22,41 |
| Piotr Żmijewski | 1–21,51 |
| Michał Miodek | 21,18 |
| Michał Koźlik | 21,00 |
| Krzysztof Kamiński | 1–20,83 |

Legenda (przykładowo): stan konta 7–32,86 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 32,86 punktów.

Listę otwiera **Franciszek Salezy Sikorski** – nowa twarz w naszym Klubie. Za nim **Janusz Olszewski** – rekomendacja zbędna! to już „44" po raz dwunasty.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2008, 2009 lub 2010.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

## Rozwiązania zadań z numeru 10/2010

Przypominamy treść zadań:

**607.** Niech $X$ będzie zbiorem $n$-elementowym ($n > 3$). Wyznaczyć największą liczbę $m$, dla której w zbiorze $X$ istnieje $m$ podzbiorów, z których żaden nie zawiera się w innym oraz żaden nie jest równoliczny z innym.

**608.** Znaleźć wszystkie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające nierówność

$$f(x) - f(y) \geqslant f(xy)(y - x) \qquad \text{dla } x, y > 0.$$

**607.** Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną $m$ podzbiorów zbioru $X$, spełniającą zadane warunki. Jeżeli do $\mathcal{F}$ należy zbiór pusty lub zbiór pełny (cały zbiór $X$), to już żaden inny zbiór nie może do $\mathcal{F}$ należeć. W tym przypadku $m = 1$.

Jeżeli do $\mathcal{F}$ należy pewien zbiór jednoelementowy $J$ oraz pewien zbiór $(n-1)$-elementowy $M$, to muszą się one dopełniać (bo inaczej $J \subset M$) oraz żaden inny zbiór nie może do $\mathcal{F}$ należeć (bo albo zawiera $J$, albo jest zawarty w $M$). W tym przypadku $m = 2$.

Przyjmijmy dalej, że żadna z tych sytuacji nie ma miejsca. Wszystkie zbiory w $\mathcal{F}$ mają z założenia różne liczności. Wykluczone zostały liczności 0, $n$ oraz albo 1, albo $n-1$. Pozostaje $n-2$ możliwych liczności. Zatem $m \leqslant n-2$.

Pokażemy teraz, że dla każdego $n \geqslant 4$ istnieje w zbiorze $X = \{1, \ldots, n\}$ rodzina $n-2$ podzbiorów $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ o wymaganych własnościach. Najpierw przykłady dla $n = 4$, $n = 5$:

$$n = 4: \quad X = \{1,2,3,4\}; \qquad A_1 = \{4\}, \quad A_2 = \{1,2\};$$

$$n = 5: \quad X = \{1,2,3,4,5\}; \quad A_1 = \{5\}, \quad A_2 = \{3,4\}, \quad A_3 = \{1,2,3\}.$$

Dalej indukcja ze skokiem o 2. Niech $\{A_1, \ldots, A_{n-2}\}$ będzie „dobrą" rodziną podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$, ponumerowanych tak, że $|A_k| = k$ dla $k = 1, \ldots, n-2$. Bierzemy zbiór $X = \{1, \ldots, n+2\}$ i określamy:

$$B_k = A_{k-1} \cup \{n+1\} \quad \text{dla } k = 2, \ldots, n-1; \qquad B_1 = \{n+2\}, \qquad B_n = \{1, \ldots, n\}.$$

Widać, że $|B_k| = k$ dla $k = 1, \ldots, n$ i że żaden ze zbiorów $B_k$ nie jest podzbiorem innego. Tak więc $\{B_1, \ldots, B_n\}$ jest rodziną podzbiorów $X$, o jaką chodzi.

Dostajemy odpowiedź: dla każdej liczby $n \geqslant 4$ maksymalna liczność rodziny $\mathcal{F}$ wynosi $n-2$.

**608.** Zamieniając miejscami $x$ i $y$, a następnie mnożąc uzyskaną nierówność przez $-1$, otrzymujemy nierówność taką samą, jak wyjściowa, lecz przeciwnie skierowaną. Treścią zadania jest więc *równanie* funkcyjne

$$f(x) - f(y) = f(xy)(y - x) \qquad \text{dla } x, y > 0.$$

Podstawiając $y = 1$ i oznaczając $a = f(1)$, dostajemy równanie $f(x) - a = f(x)(1 - x)$, czyli $a = xf(x)$. Zatem

$$f(x) = \frac{a}{x} \qquad \text{dla pewnej stałej } a > 0.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że każda taka funkcja spełnia rozważane równanie.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (7), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (4), M. Kieza, M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

* * *

Kolejny rok ligowy za nami. Czołowe postaci zeszłorocznego omówienia nie zamierzają oddać pola następcom. **Janusz Olszewski** idzie jak burza, co rok pełna runda *44* – właśnie zakończył dwunastą. **Tomasz Wietecha** w dwuboju *mat-fiz* nie ma sobie równych.

Wśród zadań minionego sezonu było kilka bardzo ciekawych. Rzetelnie trudnych, a przy tym dających pole do wykazania się pomysłowością. Dokładniejsze omówienie – niżej. Zwróćmy uwagę, że są to prawie wyłącznie zadania o numerach parzystych, czyli proponowane przez Czytelników; a właściwie grupkę kilku osób, których nazwiska powtarzają się cyklicznie, z dużą regularnością. Autorom tych zadań dziękujemy za to, co już, i prosimy o jeszcze. Innych uczestników też zachęcamy do próbowania sił w twórczości autorskiej. Dzięki Wam liga żyje!

Zadanie **586** $[X \subset \{1,\ldots,99\},\ |X| = 9 \Rightarrow \exists\, A,B \subset X\colon A \neq B,\ (\sum A) = (\sum B)]$ (współczynnik trudności $WT = 2{,}76$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Rozmiary danych mieściły się jeszcze w zasięgu domowego komputera; można było sprawdzić wszystkie możliwości – tak to zrobił **Zbigniew Galias**.

**Janusz Olszewski** przedstawił dowód dość podobny do firmowego (który dał **Krzysztof Dorobisz**, autor zadania), jednak różniący się na tyle, że warto go tu pokazać.

Niech $1 \leqslant x_1 < \ldots < x_9 \leqslant 99$ i – nie wprost – przypuśćmy, że wszystkie podzbiory zbioru $X = \{x_1,\ldots,x_9\}$ mają różne sumy. Patrzymy na niepuste podzbiory $A$ zbioru $Y = X \setminus \{x_9\}$ o liczności $|A| \leqslant 5$; jest ich 218. Odrzucamy te, w których $(\sum A) < x_4$; jest ich $\leqslant 7$ (tworzy się je jedynie z $x_1, x_2, x_3$). Niech $S$ będzie zbiorem sum $(\sum A)$ wszystkich zbiorów, które pozostały; te sumy są różne, więc $|S| \geqslant 211 > 2x_9$. Zatem $\exists\, s, s', s'' \in S\colon s < s' < s''$, $s \equiv s' \equiv s'' \pmod{x_9}$. Ponieważ $(\max S) < x_4 + 4x_9$, $(\min S) \geqslant x_4$, więc $s'' - s < 4x_9$. Stąd $s' = s + x_9$ lub $s'' = s' + x_9$, co oznacza, że $\exists\, A, C \subset Y\colon (\sum A) = (\sum C) + x_9$. Biorąc $B\colon = C \cup \{x_9\}$, dostajemy $(\sum A) = (\sum B)$.

Autor nadmienił jeszcze, że podobna metoda działa dla 9-elementowych podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,126\}$.

Obaj wymienieni autorzy sprawdzili numerycznie, że teza nie zachodzi dla zbioru $\{1,\ldots,161\}$, posiadającego podzbiór $\{77,117,137,148,154,157,159,160,161\}$, którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. Zadali też pytanie, jak to jest ogólnie: dla $m \in \mathbb{N}$ – jaka jest najmniejsza liczba $w = w(m) \in \mathbb{N}$, dla której w zbiorze $\{1,\ldots,w\}$ istnieje $m$-elementowy podzbiór $Z$, którego wszystkie podzbiory mają różne sumy. (Teza naszego zadania: $w(9) > 99$.) Jest to *problem Erdősa–Mosera*; ma sporą literaturę. **Piotr Kumor** wskazał pracę: P. Borwein, M. J. Mossinghoff, *Newman polynomials*..., opublikowaną w *Mathematics of Computation* (72 (2003), 787–800), dostępną także pod `http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein/` (w dziale MY PAPERS), opisującą algorytm, który pozwolił sprawdzić, że istotnie $w(9) = 161$ – oraz zawierającą dalsze odsyłacze bibliograficzne.

Zadanie **590** $[n \in \mathbb{N}$, parzysta; $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leqslant \frac{1+x+\ldots+x^n}{n+1}]$ ($WT = 2{,}66$; $LPR = 5$). Niech $P_n(x)$ oznacza wielomian po prawej stronie zadanej nierówności (dla $x \neq 1$: $P_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$). Teza brzmi zatem: $P_n(x) \geqslant P_1(x)^n$ dla $n = 2k$, $x \in \mathbb{R}$.

**P. Kumor** udowodnił lemat: $P_{n+1}(x) > P_1(x)P_n(x)$ dla $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$ (badając pochodną różnicy między lewą i prawą stroną). Umożliwia on analizę danej w zadaniu nierówności dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, niekoniecznie parzystych. Wyniki dla $|x| < 1$ uzyskuje się z lematu indukcyjnie; z nich zaś, zastępując $x$ przez $1/x$, wyniki dla $|x| > 1$:

$$\begin{array}{ll} P_n(x) < P_1(x)^n & \text{gdy } x < -1,\ n = 2k+1,\ k \geqslant 1; \\ P_n(x) = P_1(x)^n & \text{gdy } x = 1 \text{ lub } n = 1 \\ & \text{lub } (x = -1,\ n = 2k+1); \\ P_n(x) > P_1(x)^n & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{array}$$

**Z. Sewartowski** doszedł do tych samych ustaleń, badając pochodną funkcji $P_n(x)/P_1(x)^n$.

Tylko **J. Olszewski** i **P. Najman** zauważyli, że teza zadania jest banalnym wnioskiem z (równie banalnej) *nierówności Hadamarda*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant (b-a) f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

zachodzącej dla funkcji $f \geqslant 0$, wypukłej w przedziale $\langle a; b\rangle$ (prawa strona to pole trapezu pod styczną do wykresu w punkcie $\frac{a+b}{2}$); wystarczy przyjąć $f(t) = t^n$ w przedziale o końcach 1, $x$ (to samo uzasadnienie miał na myśli autor zadania **T. Tkocz**).

Nieco inne, już nie tak proste rozumowanie z użyciem całek (dokładniej: średnich potęgowych) przedstawił **W. Bednarek**.

Zadanie **592** [Punkt $P$ wewnątrz czworościanu $ABCD$; proste $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ przecinają sfery $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ w punktach $K, L, M, N \Rightarrow \frac{|AK|\cdot|BL|\cdot|CM|\cdot|DN|}{|AP|\cdot|BP|\cdot|CP|\cdot|DP|} \geqslant 256$] ($WT = 3{,}40$; $LPR = 3$). Uczestników ligi wyraźnie odstraszyła treść – tyle sfer!... Tymczasem – zacytujmy fragment jednej z prac: *Po rozwiązaniu analogicznego zadania płaskiego, przerobienie go na 3D jest już łatwe*; *spora liczba sfer, przecinających się w jednym punkcie, jest wskazaniem do zastosowania inwersji.* Tak właśnie – przez inwersję przestrzenną – biegnie rozwiązanie firmowe (autor zadania: **Michał Kieza**); i tak też je rozwiązali **Adam Dzedzej** (z jego pracy był cytat) i **Janusz Olszewski**. Jeszcze **Adam Woryna** – wprawdzie nie używa słowa *inwersja*, ale konstruuje czworościan jednokładny do tego uzyskanego „inwersyjnie" w rozwiązaniu firmowym i dowodzi analogicznych proporcji.

Zadanie **593** [$a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_{n+3} = (a_{n+1}a_{n+2} + 5)/a_n$ $\Rightarrow$ wszystkie $a_n$ całkowite] ($WT = 1{,}71$; $LPR = 21$). Zadanie nietrudne, dużo dobrych rozwiązań. **Tomasz Wietecha** rozwiązał zadanie nieco ogólniejsze, gdzie składnik 5 w formule rekurencyjnej jest zastąpiony dowolną liczbą naturalną $p$. Po wyprowadzeniu wzorów jawnych

$$a_{2k-1} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha - 2) - \alpha^{k-1}(\beta - 2)}{\alpha - \beta},$$
$$a_{2k} = \frac{\beta^{k-1}(\alpha - 2 - p) - \alpha^{k-1}(\beta - 2 - p)}{\alpha - \beta},$$

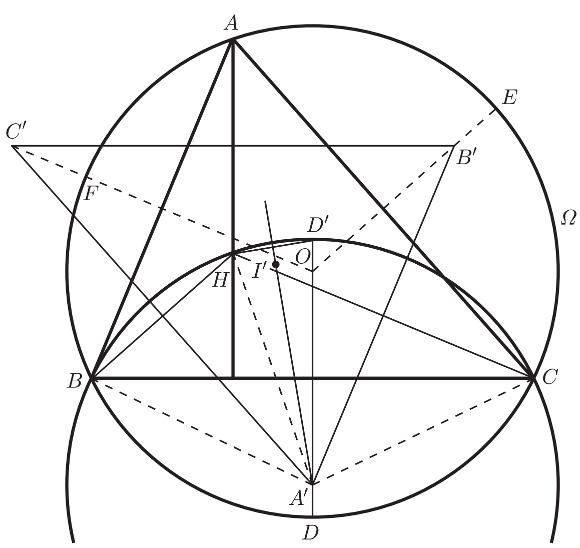
gdzie $\alpha, \beta$ to pierwiastki trójmianu $x^2 - qx + 1$ ($\alpha > \beta$), zaś $q = (3p + 5)/2$, otrzymał zależności

$$a_{2k+3} = qa_{2k+1} - a_{2k-1},$$
$$a_{2k+4} = qa_{2k+2} - a_{2k} \qquad (a_4 = p + 2).$$

Jeśli $p$ jest liczbą nieparzystą, to $q$ jest liczbą całkowitą i wszystkie $a_n$ są całkowite.

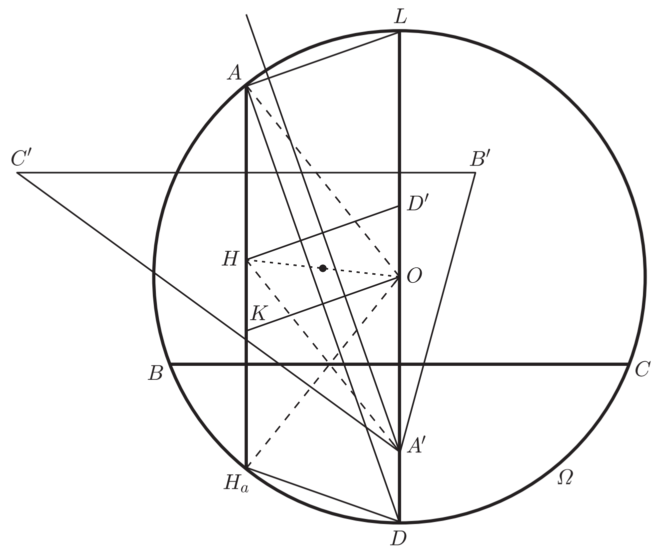
Zadanie **598** [$M = \{1, 2, \ldots, m^2\}$; ile podzbiorów bez pary liczb o różnicy podzielnej przez $m$? o różnicy równej $m$?] ($WT = 2{,}85$; $LPR = 7$). Poprawne rozwiązania nie różniły się istotnie od firmowego: **R. M. Ayoush**, **J. Cisło**, **A. Dorobisz**, **A. Dzedzej**, **J. Garnek**, **P. Sobczak** oraz **P. Najman**.

Zadanie **600** [$\triangle ABC$ wpisany w okrąg; $D, E, F$ – środki łuków $BC$, $CA$, $AB$; $D', E', F'$ – ich odbicia symetryczne względem prostych $BC$, $CA$, $AB$; $H$ – ortocentrum $\Rightarrow$ $D', E', F', H$ leżą na okręgu] ($WT = 2{,}83$; $LPR = 4$). Autor zadania, **Michał Kieza**, jest też autorem rozwiązania firmowego. Na uwagę zasługują dwa prostsze rozwiązania.




**Jerzy Cisło**: $A', B', C'$ – punkty symetryczne do $O$ (środka okręgu opisanego $\Omega$) względem prostych $BC$, $CA$, $AB$. Punkt $A'$ jest środkiem okręgu symetrycznego do $\Omega$, przechodzącego przez punkty $B$, $C$, $D'$ oraz $H$; leży on na symetralnych cięciw $BH$ i $CH$. Analogicznie, te same symetralne przechodzą (odpowiednio) przez punkty $C'$ i $B'$; zatem półproste $A'C'$ i $A'B'$ połowią kąty $HA'B$ i $HA'C$. Stąd łatwo wynika, że dwusieczna kąta $C'A'B'$ jest też dwusieczną kąta $D'A'H$, czyli symetralną odcinka $D'H$. Punkt $I'$, w którym przecinają się dwusieczne trójkąta $A'B'C'$, jest więc środkiem okręgu, przechodzącego przez punkty $D', E', F', H$.

**Marek Spychała**: $A', B', C', O, \Omega$ – jak wyżej; $H_a = AH \cap \Omega$; $DL$ – średnica $\Omega$; $OLAK$ – równoległobok. Skoro $AD \perp AL$, zaś $O$ jest środkiem $DL$, to $AD$ jest symetralną odcinka $OK$. Odcinek $HD'$ jest symetryczny względem prostej $BC$ do cięciwy $H_aD$ okręgu $\Omega$; jest więc równoległy do cięciwy $AL$ i czworokąt $OKHD'$ jest równoległobokiem. Odcinek $HA'$ jest symetryczny względem $BC$ do $H_aO$; jest więc równoległy do $AO$ i czworokąt $OAHA'$ jest równoległobokiem. Symetria względem środka odcinka $OH$ zamienia punkty: $O \leftrightarrow H$, $K \leftrightarrow D'$, $A \leftrightarrow A'$, i analogicznie $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Dwusieczna kąta $A$ w trójkącie $ABC$, będąca symetralną $OK$, przechodzi na dwusieczną kąta $A'$ w trójkącie $A'B'C'$, będącą symetralną $D'H$. Konkluzja jak w poprzednim rozwiązaniu.




Rozwiązanie rachunkowe (trygonometryczne) przedstawił **Tomasz Tkocz**. Rozwiązanie firmowe (choć zapisane w języku rachunku na wektorach) znalazł **Janusz Olszewski**, który ponadto zauważył proste uogólnienie: *Jeśli $X$ jest dowolnym punktem wewnątrz trójkąta $ABC$, a proste $AX$, $BX$, $CX$ przecinają okrąg opisany w punktach $D, E, F$, to punkty symetryczne do $D, E, F$ względem środków boków $BC$, $CA$, $AB$ leżą na jednym okręgu z ortocentrum $ABC$.* (W zadaniu $X$ jest środkiem okręgu wpisanego.) Rzeczywiście, aby uzyskać to uogólnienie, wystarczy w rozwiązaniu firmowym w jednym miejscu wykreślić słowo „prostopadłych” i wszędzie zastąpić $I$ przez $X$.

Zadanie **602** [$a, b, c > 0$; $bc + ca + ab = 1$; $A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{bc}}$; $B, C$ określone analogicznie $\Rightarrow A + B + C \leqslant \frac{1}{a+b+c}$] ($WT = 2{,}18$; $LPR = 11$). Rozwiązania były w większości zgrabniejsze od firmowego. Wybierzmy to, które podał **R. M. Ayoush** (choć bardzo podobnie rozumowali **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **J. Olszewski**). Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza:

$$\sqrt{1 + \frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \geqslant 1 \cdot 1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{c}} \geqslant 1 + \frac{2a}{b + c};$$

stąd

$$A = \frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc}} =$$
$$= a\left(1 + \sqrt{1 + \frac{a}{b}} \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{c}}\right)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant a\left(2 + \frac{2a}{b + c}\right)^{-1} = \frac{ab + ac}{2(a + b + c)}.$$

Ta nierówność i jej dwa cykliczne odpowiedniki dają po zsumowaniu tezę zadania!