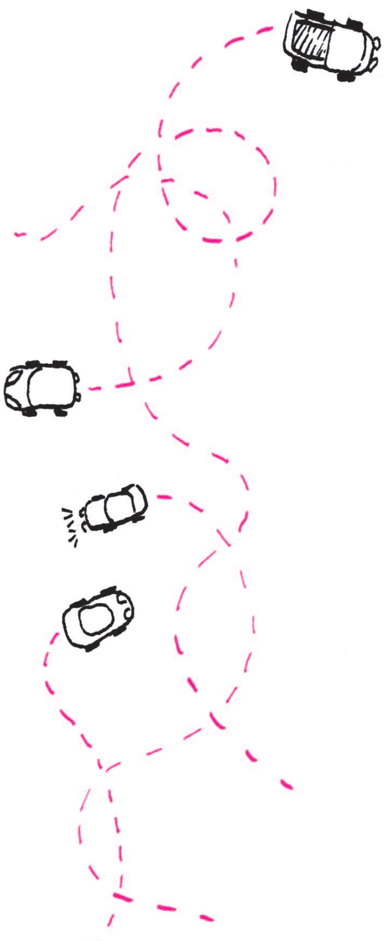
Jak zaparkować samochód?

Aleksander HORAWA, Krzysztof KAPULKIN***

Rozważmy następujący problem: na pewnym parkingu znajduje się n miejsc, ustawionych w rzędzie, ponumerowanych liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots, n$. Każdy z parkujących tam n kierowców ma swoje ulubione miejsce: dla i-tego kierowcy niech będzie to miejsce o numerze a_i, przy czym dla różnych kierowców miejsca te nie muszą być różne. Kierowcy przyjeżdżają kolejno na parking: kiedy i-ty kierowca wjeżdża na parking, jedzie aż do swojego ulubionego miejsca, a następnie, jeśli jest wolne, parkuje tam, jeśli zaś jest zajęte, parkuje na następnym wolnym miejscu. Jeśli wszystkie następne miejsca są zajęte, odjeżdża. Spróbujemy określić liczbę wszystkich takich ciągów preferencji $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, że wszystkim kierowcom uda się zaparkować swoje samochody.

Ciąg $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ będziemy nazywać *funkcją parkingową długości* n, jeśli wszystkim kierowcom uda się zaparkować samochody.



Na początek zobaczmy, ile wynosi liczba funkcji parkingowych długości n dla $n = 2$ i $n = 3$. Mamy mianowicie:

- dla $n = 2$ trzy takie ciągi: `11, 12, 21`,
- dla $n = 3$ szesnaście takich ciągów: `111, 112, 121, 211, 113, 131, 311, 122, 212, 221, 123, 132, 213, 231, 312, 321`.

Problem wyznaczenia wszystkich funkcji parkingowych długości n został rozwiązany przez Pyke'a w 1959 roku oraz niezależnie przez Konheima i Weissa w 1966 roku. Okazuje się mianowicie, że zachodzi następujące

Twierdzenie. *Liczba wszystkich funkcji parkingowych długości n wynosi*
$$(n+1)^{n-1}.$$

Dowód. Zmodyfikujmy nieco nasz problem: na początku parkingu (tj. przed miejscem o numerze 1) dodajemy miejsce o numerze 0. Ponadto pozwalamy kierowcom, którym nie udało się zaparkować zgodnie ze starymi regułami, przejechać przez parking po raz drugi, począwszy od miejsca 0, aż do pierwszego wolnego miejsca.

Oczywiście, teraz wszystkim kierowcom uda się zaparkować samochody, a jedno miejsce pozostanie wolne. Łatwo zauważyć, że ciąg $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ jest funkcją parkingową wtedy i tylko wtedy, gdy po zaparkowaniu samochodów przez wszystkich kierowców miejsce 0 pozostanie wolne.

Niech $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ będzie dowolnym ciągiem o wyrazach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jeśli zgodnie z tym ciągiem i-ty kierowca zaparkuje na miejscu p_i, to (dla $j \in \{1, \ldots, n\}$) zgodnie z ciągiem
$$\langle a_1 + j, a_2 + j, \ldots, a_n + j\rangle$$
(oczywiście modulo $n + 1$) zaparkuje na miejscu $(p_i + j) \bmod (n + 1)$.

Dla każdego ciągu $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ o wyrazach ze zbioru od 1 do n rozważmy zbiór:
$$(*) \qquad \{\langle a_1 + j, a_2 + j, \ldots, a_n + j\rangle \bmod (n + 1)\}_{j=0,1,\ldots,n}.$$

Każdy taki ciąg wyznacza n-elementowy podzbiór zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$ – zbiór tych miejsc, na których zaparkują kierowcy. Odwrotnie: każdy taki podzbiór jest wyznaczony przez pewien ciąg postaci $\langle a_1 + j, a_2 + j, \ldots, a_n + j\rangle \bmod (n + 1)$. Oczywiście, tylko jeden n-elementowy podzbiór zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$ nie zawiera liczby 0, a zatem tylko jeden ciąg z powyższego zbioru jest funkcją parkingową. Suma wszystkich zbiorów $(*)$ jest zbiorem wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n\}$. Liczba takich ciągów wynosi $(n + 1)^n$. Zatem liczba funkcji parkingowych długości n musi być równa
$$\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}. \qquad \square$$

Funkcje parkingowe, o których mowa w powyższym twierdzeniu, znalazły szereg zastosowań w kombinatoryce, a w szczególności w teorii grafów. Jako przykład

*uczeń, I Społeczne LO z Maturą Międzynarodową w Warszawie
**doktorant, Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Department of Philosophy, Carnegie Mellon University

można przytoczyć twierdzenie Sylvestera, Borchardta i Cayleya mówiące o tym, że liczba wszystkich lasów ukorzenionych o n ponumerowanych wierzchołkach jest równa liczbie funkcji parkingowych długości n. Czytelnik może w charakterze prostego ćwiczenia spróbować wykazać, że liczba niemalejących funkcji parkingowych wynosi dokładnie

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Na koniec powiedzmy, że liczby tej postaci, zwane *liczbami Catalana*, występują w wielu miejscach w bardzo różnych dziedzinach matematyki. Kombinatorycznie liczby Catalana można zdefiniować na ponad 60 różnych sposobów. Dla przykładu, liczby Catalana to: liczba poprawnych nawiasowań przy użyciu n par nawiasów, liczba ciągów zero-jedynkowych zdominowanych przez 0, liczba triangulacji $(n+2)$-kąta wypukłego. Ale to już zupełnie inna opowieść.

Las, jak łatwo się domyślić, to po prostu zbiór drzew. A las ukorzeniony to zbiór drzew ukorzenionych.

Wskazówka. Udowodnij (przez indukcję), że ciąg $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ jest funkcją parkingową wtedy i tylko wtedy, gdy jego niemalejąca permutacja jest funkcją parkingową.

Flexor Connelly'ego

Prawie dwieście lat temu Augustin Cauchy udowodnił, że wielościan wypukły, który ma sztywne ściany, jest cały sztywny, choćby jego krawędzie były wyposażone w najlepsze zawiasy. I postawił problem, czy założenie wypukłości jest konieczne.

W 1978 roku Robert Connelly pokazał wielościan, którego siatka jest na rysunku. Należy ją skleić tak, by kolorowe krawędzie zwrócone były „ostrzem” na zewnątrz, a czarne – do wewnątrz. Wielościan ten jest flexorem, czyli wielościanem, który może się odkształcać bez odkształcania ścian.

Flexor Connelly'ego najlepiej wykonać dla następujących wymiarów krawędzi:

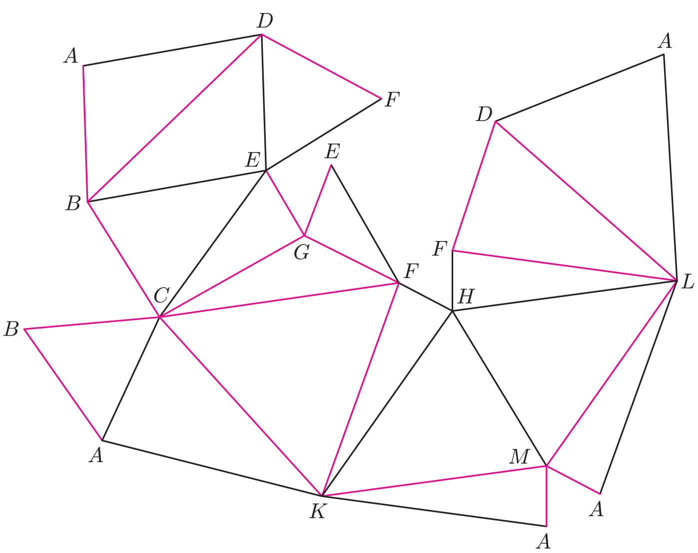
$AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15a$,

$AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9a$, $AM = FH = 4a$,

$AD = BE = CE = HM = 12a$, $BD = CF = CK = DL = 16a$,

$CG = 11a$, $EG = 5a$, $FG = 7a$; rozsądnie jest przyjąć $a = 1$ cm.

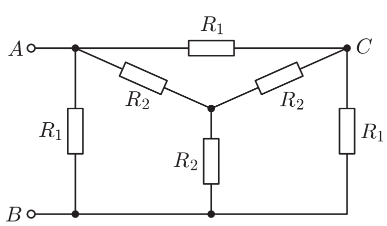
M. K.



Zadania

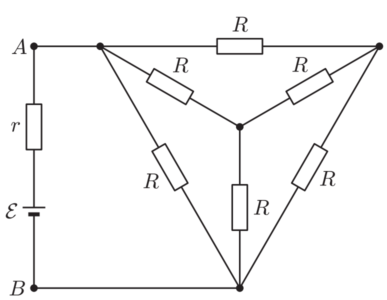
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 781. Jaki jest opór między punktami A i B sieci pokazanej na rysunku 1? $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 782. Dla obwodu z rysunku 2 wyznaczyć wartość R, taką że moc wydzielana między punktami A i B jest maksymalna.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 2

Redaguje Przemysław MAZUR

M 1303. Częścią wspólną dwóch przystających kwadratów jest ośmiokąt. Jego boki będące na obwodzie jednego z kwadratów oznaczamy ciągłą linią kolorową, a boki na obwodzie drugiego – przerywaną. Udowodnić, że suma długości odcinków ciągłych jest równa sumie długości odcinków przerywanych.
Rozwiązanie na str. 9

M 1304. Dane są takie liczby niewymierne dodatnie p, q, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz w dokładnie jednym z ciągów $(\lfloor np\rfloor)_{n=1}^{\infty}, (\lfloor nq\rfloor)_{n=1}^{\infty}$.
Rozwiązanie na str. 14

M 1305. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y spełniających warunek $x + y = 1$ zachodzi nierówność $(1 - x^m)^n + (1 - y^n)^m \geqslant 1$.
Rozwiązanie na str. 8