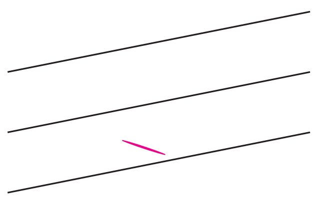
Jak matematyk rzuca igłą?

Mateusz WRÓBEL

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXII Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2010 roku (Olsztyn). Autor był uczniem I Publicznego Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Opolu.

Jednym z najbardziej znanych zagadnień prawdopodobieństwa geometrycznego jest problem *igły Buffona*. Treść tego zadania zna wiele osób, które, nawet jeśli nie znają sposobu rozwiązania, to wiedzą, że jest ono związane z liczbą π. Istotnie, pozwala to (w odpowiednim modelu matematycznym) wyznaczyć przez wykonanie serii doświadczeń wartość liczby π z dokładnością zależną od liczby doświadczeń.

Treść zadania brzmi: *na podłogę wyłożoną identycznymi, nieskończenie długimi deskami jedna obok drugiej (tak że nie ma między nimi przerw) rzucamy igłę o nierozróżnialnych końcach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła będzie dotykać miejsca styku dwóch desek?*



Rys. 1. Igła rzucona na podłogę z desek.

Podłogę możemy zastąpić płaszczyzną podzieloną rodziną prostych równoległych L_1, reprezentujących miejsca styku dwóch desek. Odległość między dwiema kolejnymi prostymi jest równa a – szerokości deski. Jeżeli przyjmiemy realistyczne założenia, że grubość igły jest dużo mniejsza od szerokości deski oraz że igła nigdy nie upadnie na sztorc, to możemy traktować ją jak odcinek o długości l.

Nie napiszę kolejny raz standardowego rozwiązania – jest ono wystarczająco rozpowszechnione. Zastanówmy się nad innym podejściem do tego problemu.

Niech $f(l)$ oznacza średnią liczbę przecięć odcinka o długości l z prostymi rodziny L_1 przy jednym rzucie. Zauważmy, że jeśli nasz odcinek dowolnie podzielimy na dwie części o długości x i y (oczywiście $x + y = l$ oraz $x, y \geqslant 0$), to wartość oczekiwana liczby przecięć, liczona dla mniejszych fragmentów, po zsumowaniu da wartość oczekiwaną liczby przecięć dla odcinka wyjściowego:

$$f(l) = f(x + y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Dodajmy jeszcze jedno proste spostrzeżenie: $f(0) = 0$.

Z powyższej równości wynika bardzo ważny wniosek: wartość $f(l)$ będzie taka sama, gdy zamiast odcinkiem będziemy „rzucać” dowolną łamaną o długości l – wystarczy podzielić ją na kawałki prostoliniowe i użyć równości (1) tyle razy, ile tych kawałków będzie. Stąd dla dowolnego wielokąta o obwodzie równym l w naszym doświadczeniu otrzymamy taką samą wartość oczekiwaną liczby przecięć z prostymi z rodziny L_1 jak dla igły o długości l. Tę własność mają również krzywe o długości l, które możemy podzielić na małe fragmenty wyglądające prawie jak odcinki. Takie krzywe mogą być zamknięte (na przykład okrąg spełnia powyższy warunek). Dla uproszczenia zakładamy, że nie mają samoprzecięć (czyli ósemki nie uwzględniamy).

Założenie ciągłości funkcji f opisanej zależnością (1) w rozpatrywanej sytuacji wydaje się bardzo naturalne: bardzo mała zmiana długości rzucanej krzywej spowoduje również niewielką zmianę wartości oczekiwanej liczby przecięć.

Zależność (1) jest równaniem funkcyjnym, zwanym *równaniem Cauchy'ego*, które przy założeniu ciągłości szukanej funkcji f spełniają tylko funkcje liniowe:

$$f(t) = ct, \tag{2}$$

gdzie c jest stałą. Stałą c można wyznaczyć, zauważając, że okrąg o promieniu $r = \frac{a}{2}$, przy dowolnym ułożeniu na rozważanym podłożu, zawsze będzie miał dokładnie dwa punkty wspólne z narysowanymi prostymi. Obwód tego okręgu wynosi $l = a\pi$, stąd

$$2 = f(a\pi) = c \cdot a\pi,$$

a więc $c = \frac{2}{a\pi}$.

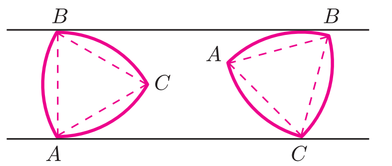
Zauważmy, że odcinek o długości $l < a$ może przeciąć co najwyżej jedną prostą z rodziny L_1. Zatem w tym przypadku

$$f(l) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

gdzie p jest szukanym prawdopodobieństwem przecięcia odcinka i prostej z L_1. To daje nam oczekiwany wynik:

$$p = f(l) = cl = \frac{2l}{a\pi}.$$

Stąd właściwie „za darmo” otrzymujemy dowód *twierdzenia Barbiera*. Zanim przejdziemy do szczegółów, zwróćmy uwagę, że do wyznaczenia stałej c z równości (2) może posłużyć dowolna krzywa o następującej własności:



Rys. 2. Trójkąt Reuleaux.
Niech punkty A, B, C będą wierzchołkami trójkąta równobocznego. Zakreślmy łuk łączący punkty B i C i mający środek w punkcie A. Analogicznie zakreślamy łuki od punktu C do A i środku w B oraz od A do B o środku w C. Łuki te tworzą trójkąt Reuleaux.

przy każdym położeniu takiej krzywej na naszym podłożu, podzielonym prostymi równoległymi z rodziny L_1, przecina się ona z prostymi w dokładnie dwóch punktach. Takie krzywe nazywają się *krzywymi o stałej szerokości*, a najpopularniejszym przykładem takiej krzywej, różnym od okręgu, jest trójkąt Reuleaux. Dodajmy jeszcze, że różnych, parami niepodobnych krzywych, o stałej (i ustalonej) szerokości jest nieskończenie wiele.

Twierdzenie (Barbier, 1860). *Figury o stałej szerokości a mają jednakowe obwody równe $a\pi$.*

Dowód. Załóżmy, że F jest figurą o stałej szerokości a. Figura F dowolnie umieszczona na płaszczyźnie z narysowaną rodziną prostych L_1 będzie mieć dokładnie dwa punkty wspólne z tymi prostymi. Jeśli $l(F)$ oznacza obwód figury F, to bezpośrednio z definicji funkcji f mamy

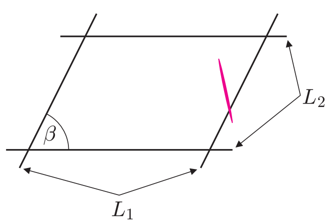
$$f(l(F)) = 2.$$

Z drugiej strony wiemy już, że $f(t) = \frac{2}{a\pi} \cdot t$, i dlatego

$$2 = f(l(F)) = \frac{2}{a\pi} \cdot l(F).$$

Skąd natychmiast otrzymujemy $l(F) = a\pi$ – obwód figury F zależy więc jedynie od szerokości a. □

Zajmijmy się teraz nieco innym zadaniem. Dorysujmy na płaszczyźnie rodzinę prostych równoległych L_2, takich że odległość między dwiema kolejnymi prostymi z tej rodziny jest równa b, a rodzina prostych L_2 przecina proste L_1 pod danym kątem $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. W ten sposób otrzymujemy płaszczyznę podzieloną prostymi na przystające równoległoboki. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że igła przetnie równocześnie którąkolwiek z prostych rodziny L_1 i prostych rodziny L_2 w tej, nieco ogólniejszej, sytuacji. Poniżej przedstawię rozwiązanie metodą „standardową”, jednak zachęcam do poszukiwania metody podobnej do powyższej, za pomocą równania funkcyjnego.



Rys. 3. Igła rzucona na płaszczyznę podzieloną rodzinami prostych L_1 i L_2.

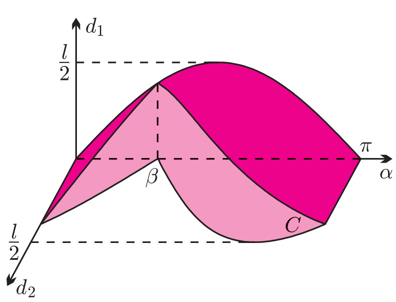
Położenie igły w tym przypadku najlepiej określić, znając kąt $\alpha \in [0, \pi)$ między igłą a prostą rodziny L_1, odległość $d_1 \leqslant \frac{a}{2}$ środka igły od najbliższej prostej z rodziny L_1 oraz odległość $d_2 \leqslant \frac{b}{2}$ środka igły od najbliższej prostej rodziny L_2.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych Ω jest zbiór

$$\Omega = [0, \pi) \times \left[0, \frac{a}{2}\right] \times \left[0, \frac{b}{2}\right].$$

Igła przetnie proste, gdy parametry $(\alpha, d_1, d_2) \in \Omega$ spełniają warunki

$$C : \begin{cases} \frac{l}{2} \sin|\alpha - \beta| \geqslant d_2, \\ \frac{l}{2} \sin\alpha \geqslant d_1. \end{cases} \tag{3}$$



Rys. 4. Zbiór C zdarzeń, w których igła przecina prostą z L_1 i prostą z L_2.

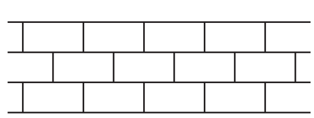
Do obliczenia miary (objętości) powyższego podzbioru C przestrzeni Ω możemy wykorzystać regułę Cavalieriego: żeby otrzymać objętość C, całkujemy względem $t \in [0, \pi)$ pola przekrojów C płaszczyznami $\alpha = t$. Łatwo sprawdzić, że każdy przekrój figury C płaszczyzną $\alpha = t$ dla $t \in [0, \pi)$ jest prostokątem o wymiarach $\frac{l}{2} \sin|t - \beta|$ na $\frac{l}{2} \sin t$. Otrzymujemy więc

$$|C| = \int_0^\beta \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \cdot \frac{l}{2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha + \int_\beta^\pi \frac{l}{2} \sin(\alpha - \beta) \cdot \frac{l}{2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{l^2}{4}\left(\sin\beta - \beta\cos\beta + \frac{\pi}{2}\cos\beta\right).$$

Gdy $a, b \geqslant l$, szukane prawdopodobieństwo wyraża się przez stosunek objętości obszaru C do objętości prostopadłościanu Ω:

$$\frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{l^2\left(\sin\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\beta\right)}{ab\pi}.$$



Rys. 5. Mur z cegieł.

Można zastanawiać się nad podobnymi zagadnieniami: na przykład, ciekawy wydaje się rzut igłą na płaszczyznę z narysowaną mozaiką złożoną z przystających prostokątów, tworzących „mur z cegieł”. Rozwiązanie tego problemu pozostawiam Czytelnikom.