można przytoczyć twierdzenie Sylvestera, Borchardta i Cayleya mówiące o tym, że liczba wszystkich lasów ukorzenionych o n ponumerowanych wierzchołkach jest równa liczbie funkcji parkingowych długości n. Czytelnik może w charakterze prostego ćwiczenia spróbować wykazać, że liczba niemalejących funkcji parkingowych wynosi dokładnie

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Na koniec powiedzmy, że liczby tej postaci, zwane *liczbami Catalana*, występują w wielu miejscach w bardzo różnych dziedzinach matematyki. Kombinatorycznie liczby Catalana można zdefiniować na ponad 60 różnych sposobów. Dla przykładu, liczby Catalana to: liczba poprawnych nawiasowań przy użyciu n par nawiasów, liczba ciągów zero-jedynkowych zdominowanych przez 0, liczba triangulacji $(n+2)$-kąta wypukłego. Ale to już zupełnie inna opowieść.

Las, jak łatwo się domyślić, to po prostu zbiór drzew. A las ukorzeniony to zbiór drzew ukorzenionych.

Wskazówka. Udowodnij (przez indukcję), że ciąg $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ jest funkcją parkingową wtedy i tylko wtedy, gdy jego niemalejąca permutacja jest funkcją parkingową.

Flexor Connelly'ego

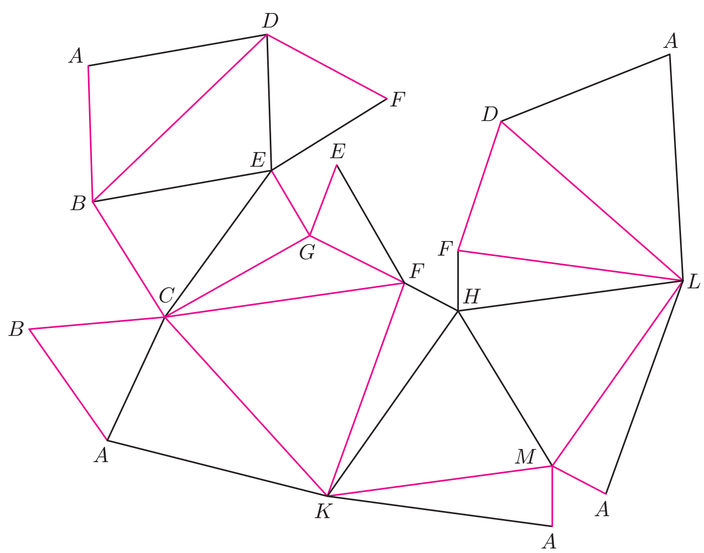
Prawie dwieście lat temu Augustin Cauchy udowodnił, że wielościan wypukły, który ma sztywne ściany, jest cały sztywny, choćby jego krawędzie były wyposażone w najlepsze zawiasy. I postawił problem, czy założenie wypukłości jest konieczne.

W 1978 roku Robert Connelly pokazał wielościan, którego siatka jest na rysunku. Należy ją skleić tak, by kolorowe krawędzie zwrócone były „ostrzem” na zewnątrz, a czarne – do wewnątrz. Wielościan ten jest flexorem, czyli wielościanem, który może się odkształcać bez odkształcania ścian.

Flexor Connelly'ego najlepiej wykonać dla następujących wymiarów krawędzi:

$AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15a$,
$AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9a$, $AM = FH = 4a$,
$AD = BE = CE = HM = 12a$, $BD = CF = CK = DL = 16a$,
$CG = 11a$, $EG = 5a$, $FG = 7a$; rozsądnie jest przyjąć $a = 1$ cm.

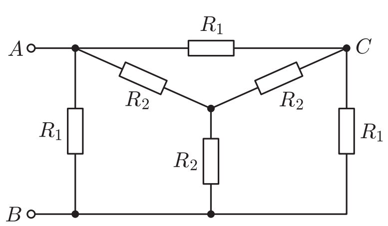
M. K.



Zadania

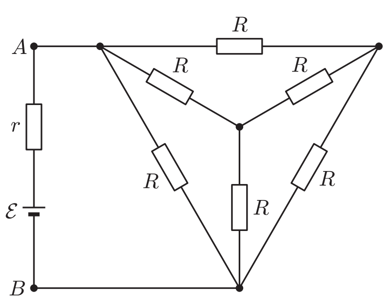
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 781. Jaki jest opór między punktami A i B sieci pokazanej na rysunku 1? $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 782. Dla obwodu z rysunku 2 wyznaczyć wartość R, taką że moc wydzielana między punktami A i B jest maksymalna.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 2

Redaguje Przemysław MAZUR

M 1303. Częścią wspólną dwóch przystających kwadratów jest ośmiokąt. Jego boki będące na obwodzie jednego z kwadratów oznaczamy ciągłą linią kolorową, a boki na obwodzie drugiego – przerywaną. Udowodnić, że suma długości odcinków ciągłych jest równa sumie długości odcinków przerywanych.
Rozwiązanie na str. 9

M 1304. Dane są takie liczby niewymierne dodatnie p, q, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz w dokładnie jednym z ciągów $(\lfloor np\rfloor)_{n=1}^{\infty}, (\lfloor nq\rfloor)_{n=1}^{\infty}$.
Rozwiązanie na str. 14

M 1305. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y spełniających warunek $x + y = 1$ zachodzi nierówność $(1 - x^m)^n + (1 - y^n)^m \geqslant 1$.
Rozwiązanie na str. 8