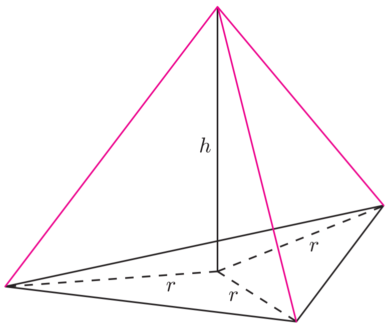
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

W roku szkolnym 2010/2011 odbywa się szósta edycja Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Jest to już od kilku lat najbardziej prestiżowy ogólnopolski konkurs matematyczny dla uczniów gimnazjów. Pierwszy etap (korespondencyjny) zakończył się 25 października. Wzięło w nim udział około 1000 uczniów (w momencie składania tego tekstu do druku nie była znana dokładna liczba uczestników). Jest to liczba porównywalna z poprzednią edycją OMG. Poniżej przedstawiamy wraz z przykładowymi rozwiązaniami trzy zadania z pierwszego etapu VI OMG, które – zdaniem autorów tego tekstu – należały do najciekawszych.

Zadanie 2. *W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.*

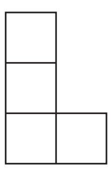


Rys. 1

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeżeli odcinek łączący wierzchołek czworościanu ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie jest jednocześnie wysokością tego czworościanu, to krawędzie wychodzące z tego wierzchołka są równej długości (patrz rysunek 1). Oznaczmy wierzchołki czworościanu przez A_i oraz długość krawędzi wychodzących z wierzchołka A_i przez a_i, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Wtedy krawędź A_iA_j, gdzie $i \neq j$, wychodzi z wierzchołka A_i oraz z wierzchołka A_j. Oznacza to, że $a_i = a_j$, a więc czworościan jest foremny.

Zadanie 5. *W każde pole kwadratowej tablicy 100×100 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L-tetraminem, jest równa zeru. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.*

L-tetraminem nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku:



L-tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b
c	d	c	d

Rys. 2

Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę wpisaną w i-ty wiersz i j-tą kolumnę tablicy przez $a_{i,j}$, gdzie $i, j = 1, \ldots, 100$. Przykrywając L-tetraminem liczby $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}$, a następnie liczby $a_{1,2}, a_{2,2}, a_{3,2}, a_{1,3}$, stwierdzamy, że $a_{1,1} = a_{1,3}$. Postępując analogicznie, zauważamy, że $a_{i,j} = a_{(i+2),j}$ dla $i = 1, \ldots, 98$, $j = 1, \ldots, 100$ oraz $a_{i,j} = a_{i,(j+2)}$ dla $i = 1, \ldots, 100$, $j = 1, \ldots, 98$. Otrzymany wynik oznacza, że rozważana tablica jest okresowa o okresie 2. Innymi słowy, dowolny kwadrat wymiaru 4×4, zawarty w tej tablicy, ma postać jak na rysunku 2. Przykrywając L-tetraminem pierwsze dwie kolumny rozważanego kwadratu, wnioskujemy, że $a + b + c + d = 0$. Przykrywając L-tetraminem liczby a, c, a, b, otrzymujemy $2a + b + c = 0$, co razem z poprzednią równością daje $a = d$. Przykrywając L-tetraminem liczby b, d, b, a, wnioskujemy analogicznie, że $a = c$. Zatem rozważana tablica zawiera tylko dwie różne liczby $a = a_{i,j}$ dla $i + j$ parzystych i $b = a_{i,j}$ dla $i + j$ nieparzystych. Ponadto widzimy, że $a + b + c + d = 2(a + b) = 0$. Stąd suma wszystkich liczb stojących na obu głównych przekątnych tablicy wynosi

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{100,100} + a_{1,100} + a_{2,99} + \ldots + a_{100,1} = 100(a + b) = 0.$$

Zadanie 7. *Udowodnij, że nie istnieją liczby nieparzyste a i b spełniające równanie $a^2 - b^3 = 4$.*

Rozwiązanie. Zapiszmy rozważane równanie w postaci $(a + 2)(a - 2) = b^3$. Liczby $a + 2$ i $a - 2$ są nieparzyste i różnią się o 4. Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb $a + 2$ i $a - 2$, to d dzieli także różnicę tych liczb. Liczba 4 (poza liczbami 1 i -1) ma tylko parzyste dzielniki i dlatego liczby $a + 2$ i $a - 2$ są względnie pierwsze. Wnioskujemy stąd, że $a + 2 = k^3$ i $a - 2 = l^3$, gdzie k, l są liczbami nieparzystymi. Z definicji liczb k i l wiemy, że $k^3 - l^3 = (k - l)(k^2 + kl + l^2) = 4$. Zauważmy, że liczba $k - l$ nie może być równa 2, ponieważ liczba $k^2 + kl + l^2$ jest nieparzysta. Pozostał do rozważenia przypadek $k - l = 4$. Wtedy $k^2 + kl + l^2 = (k - l)^2 + 3kl = 16 + 3kl = 1$, co prowadzi do równości $kl = -5$. Jedyne pary liczb całkowitych (k, l), gdzie $k > l$, spełniające tę równość, to $(5, -1)$ oraz $(1, -5)$. W obu przypadkach $k - l = 6$ i otrzymujemy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI