Inne spojrzenie, czyli odpowiedź na pytanie, dlaczego

Martin Gardner był wielkim matematykiem, choć matematykiem nie był

Martin Gardner urodził się 21 października 1914 r., a zmarł 22 maja 2010 r. Dwadzieścia pięć lat (1956–81) z jego długiego żywota zajęło redagowanie kącika matematycznego w *Scientific American.* I można by dopisać tu listę jego książek i artykułów. Ale to byłoby bez sensu. Bo o tym, co człowiek zrobił naprawdę, decyduje jedynie to, co w świecie po jego śmierci jest – dzięki niemu – inne, niż gdy się rodził.

Dość rozpowszechnione jest mniemanie, że matematyka to jest to, co robią matematycy. I wydaje się na pozór, że nie ma możliwości różnych interpretacji tego zdania. Pewien niepokój może, co prawda, wywoływać fakt, że tego rodzaju pogląd mają również uczniowie szkół niższych szczebli, co dla tych z nich, którzy spróbują uprawiać matematykę zawodowo, może się stać traumatycznym przeżyciem po wstąpieniu na studia. Aby temu zaradzić, powstało (w szczególności) dzieło *Co to jest matematyka?* Couranta i Robbinsa, w którym w sposób przystępny zrelacjonowano główne pojęcia i wyniki matematyki u progu XX wieku. Zaplecze dla tej książki stanowiły (niezbyt, co prawda, liczne) opracowania, od *Geometrii poglądowej* Hilberta i Cohn-Vossena po *Kalejdoskop matematyczny* Steinhausa. I one definiowały matematykę, choć społeczną opinię na ten temat deformowały (obok programu szkolnego) rozliczne dzieła popularyzatorów. I wydawało się, że tak być musi i tak już zawsze będzie: matematyka to produkty końcowe tego, czym zajmują się zawodowcy, plus techniczne przepisy umożliwiające wykonywanie obliczeń praktycznych.

Martin Gardner nie był matematykiem. Może właśnie dlatego mógł dostrzec, że matematyka – nawet określona wedle powyższych zasad – zmienia się. Coraz więcej bowiem matematyków zaczęło zajmować się budowaniem matematycznych modeli rzeczywistości. Działalność ta zaczęła dotyczyć nie tylko oczywistych opisów zjawisk fizycznych i ich technicznych realizacji, ale również procesów chemicznych, struktur biologicznych, medycyny, reguł genetycznych, prawidłowości handlu – i szerzej – gospodarki, zjawisk społecznych i psychicznych, wszelkiej logistyki, a nawet kultury.

Powszechność stosowania modeli matematycznych we wszystkich dziedzinach życia kazała Gardnerowi postawić pytanie, co on powinien zaczerpnąć z matematyki, by mógł prawidłowo i bez obaw posługiwać się tymi wszystkimi strukturami. Odpowiedź była bardzo prosta – i może dlatego dla wielu do dziś niedostrzegalna – nie będąc matematykiem, z matematyki trzeba zaczerpnąć nie jej wyniki i pojęcia, lecz **sposób myślenia**. I upowszechnieniem tego przekonania zajmował się całe życie.

Każdy bez trudu w Internecie, bibliotece czy księgarni znajdzie wiele tekstów Gardnera. Nie będę więc ich wyliczał, a pragnę tylko zwrócić uwagę na niektóre zadania czy pomysły, które dobitnie wskazują, jak inne jest jego spojrzenie na matematykę od prezentowanego np. w wymienionych wyżej książkach.

Puchary

Miałem okazję wraz z Pawłem Strzeleckim być obiektem agresji w Kawiarence Naukowej *Przekroju* – rozwiązania poniższego zadania nie tylko nie zrozumiano, lecz nawet nie uwierzono, że jest możliwe.

W jednym pucharze jest woda, w drugim wino. Zaczerpnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wlano do pierwszego. Potem zaczerpnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wlano do drugiego. Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?

Powodem agresji był fakt, że rozwiązanie nie zależy od tego, czy puchary miały tę samą objętość, ani od stosunku objętości pucharów i kieliszka, ani od tego, czy po pierwszej operacji wymieszano płyn w pierwszym pucharze itd. Wynik zawsze jest taki sam: *tyle samo jest wody w winie, co wina w wodzie*.

W obu naczyniach na początku i po obu operacjach poziom cieczy jest taki sam: ile więc jednej ubyło, tyle drugiej przybyło.

Kolejka

Codziennie o 16:00 mąż powraca z pracy kolejką podmiejską do rodzinnego Iksinowa. W tym też momencie jego żona zajeżdża na przystanek swoim samochodem, by odwieźć go do domu. Pewnego razu mężowi udało się wsiąść do godzinę wcześniejszej kolejki. Po przyjeździe do Iksinowa ruszył pieszo na spotkanie żony. Gdy spotkała go na drodze i powrócili do domu, okazało się, że są 10 minut wcześniej niż zwykle. Ile czasu mąż szedł pieszo?

I tu nie jest ważne, jaka była odległość przystanku od domu, z jaką prędkością jechał samochód i z jaką prędkością szedł bohater opowieści. Jakiekolwiek by one nie były, wynik jest zawsze ten sam: *mąż szedł 55 minut*.

Jeśli żona wróciła do domu 10 minut wcześniej, to zawróciła o 5 minut wcześniej niż zazwyczaj – a więc o 15:55.

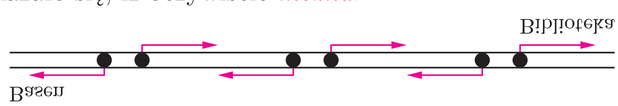
Obie metody, zastosowane przy rozwiązywaniu powyższych zadań, noszą w matematyce odpowiednio godne (może zresztą dla laików odstraszające) nazwy, ale nie ma najmniejszego powodu, by je przytaczać. U Gardnera nie uczymy się matematyki – uczymy się myśleć jak matematycy, a to zupełnie coś innego.

Najbardziej może istotnym elementem matematycznego myślenia według Gardnera (ale przecież wszyscy matematycy w istocie tak sądzą) jest obserwacja. Zobaczmy to na przykładach.

Tramwaj

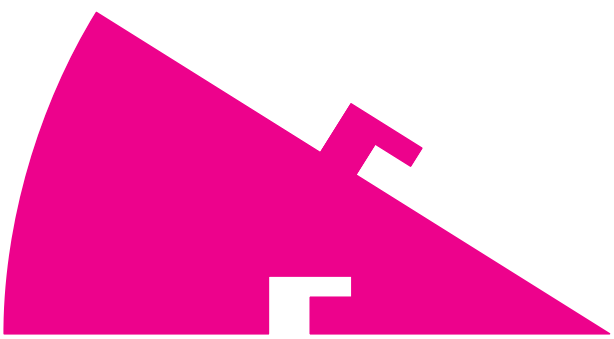
Jaś po obiedzie biegnie na przystanek i wsiada w pierwszy nadjeżdżający tramwaj. Jadące w prawo wiozą go do biblioteki, a jadące w lewo – na basen. W każdą stronę tramwaje jeżdżą regularnie co dziesięć minut. Po półroczu okazało się, że Jaś cztery razy częściej bywał na basenie niż w bibliotece. Czy można wyjaśnić tę niesymetryczność, nie kwestionując tego, że obiady są podawane z dużą, losową nieregularnością, a Jaś tak samo lubi basen jak bibliotekę?

Zadanie to, podane w bardziej frywolnej scenerii, było początkiem pierwszego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa na moich studiach (w szkole wtedy probabilistyki nie było). I zawstydziliśmy się, gdy okazało się, iż oczywiście *można*.



Wystarczy ten rysunek?

Odetnij połowę



czyli przetnij przedstawioną figurę na dwie identyczne części.

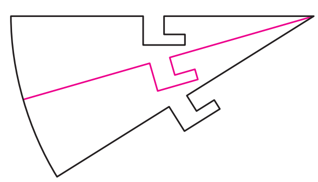


Figura ma dwie „dzikie” linie, które można nałożyć przez obrót względem ich wspólnego końca o pewien kąt. Obróćmy zatem „dziką” linię o połowę tego kąta. Otrzymana linia podzieli figurę na części jednakowe, bo dające się nałożyć przez obrót o tę samą połowę kąta.

Turniej

W turnieju tenisowym (a więc rozgrywanym systemem pucharowym) bierze udział 197 tenisistów. Jak zaplanować turniej, by wyłonić zwycięzcę, a przy tym – ze względu na wielką liczbę uczestników – żeby rozegrana została najmniejsza liczba meczów?

Oczywiście, z punktu widzenia liczby meczów, *każde jego ułożenie jest jednakowo oszczędne*.

Istotnie, w każdym meczu odpada jeden zawodnik, więc meczów w każdym przypadku będzie 196.

To ostatnie zadanie przypomina znane zadanie o czekoladzie (np. 6×4): *jak najlepiej ją łamać, by każdy kafelek był osobno.*

Aby otrzymać dobry wynik (w naszym przypadku 23 łamania), trzeba dodać warunek, by nie łamać za jednym zamachem kilku kawałków położonych jedne na drugich. Wolne od takich ograniczeń jest kolejne zadanie.

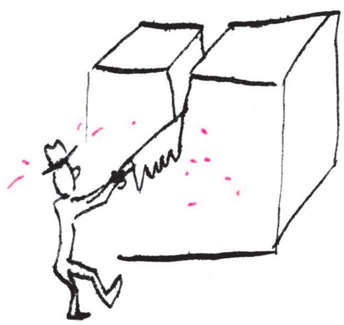
Cięcie piłą

Jak wiadomo, sześcian dzieli się na 27 sześcianów o trzy razy krótszej krawędzi. Jaka jest najmniejsza liczba cięć, które pozwolą to zrealizować? Uzyskane w jakimś cięciu kawałki można ułożyć jedne na drugich i ciąć za jednym zamachem.

Pomalujmy sześcian jaskrawą farbą przed pocięciem. Po pocięciu jeden z sześcianików będzie miał wszystkie ściany niepomalowane. A ścian tych jest 6. Ponieważ żadnych dwóch z nich nie można otrzymać w jednym cięciu, więc mniej niż 6 cięć być nie może (a czy może być 6?).

Wszystko to pięknie, ale nie sposób nie zadać pytania

czy taka gardnerowska matematyka to ta sama matematyka, którą uprawiają zawodowcy?

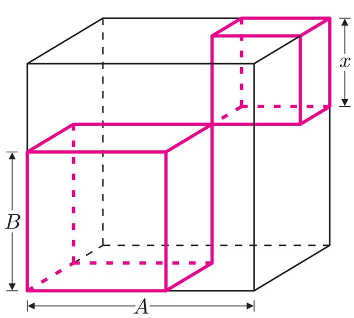


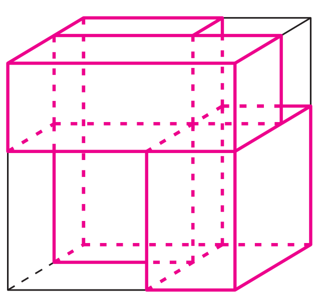
Innymi słowy, skąd wziąć pewność, że nie są to tylko jakieś „anegdotki" (by użyć sformułowania wybitnego autorytetu edukacji)? Jak udowodnić, że gardnerowskie myślenie to rzeczywiście myślenie matematyczne?

Przede wszystkim jest mocny dowód socjologiczny. Większość zarówno wybitnych, jak i szeregowych matematyków uważa, że to, co proponuje Gardner, wyraża ich sposób myślenia, a na dodatek jest – jako przygoda intelektualna – atrakcyjne również dla nich samych. Zostało to wyrażone w wielu publikacjach, w formie licznych nagród, w wydaniu kilku ksiąg ku czci Gardnera.

Ale o wiele lepszym dowodem jest jednak przyjrzenie się procesowi odkryć dokonywanych na pierwszej linii matematycznych zmagań. Tam, gdzie jesteśmy w stanie wyłuskać go z pancerza formalizmów, okazuje się on identyczny z przytoczonymi wyżej zadaniami.

Równanie trzeciego stopnia





Tartaglia przyjrzał się temu, co będzie, gdy z przeciwległych rogów sześcianu o krawędzi A wytniemy sześciany o krawędziach B i x stykające się jednym wierzchołkiem. I spostrzegł, że to, co zostanie, to trzy identyczne cegły o krawędziach A, B, x. Daje to zależność

$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx, \quad \text{czyli} \quad x^3 + 3ABx = A^3 - B^3.$$

Gdy więc mamy rozwiązać równanie $x^3 + px = q$, możemy wyobrazić sobie taki sześcian, w którym $3AB = p$ (czyli $A^3B^3 = \frac{p^3}{27}$) i $A^3 - B^3 = q$. Otrzymaliśmy zwykłe, szkolne równanie kwadratowe:

$$(q + B^3)B^3 = \frac{p^3}{27}, \quad \text{czyli} \quad (B^3)^2 + q(B^3) - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Zatem

$$B^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} \quad \text{i} \quad A^3 = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}.$$

Ponieważ z rysunku mamy $A = B + x$, więc

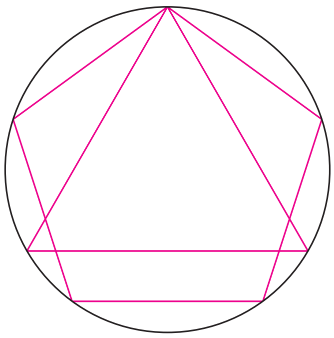
$$x = A - B = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Na przykład dla $x^3 + 6x + 7 = 0$ mamy

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} - \frac{7}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{49}{4} + 8} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8} = 1 - 2 = -1.$$

Oczywiście, dalej mogą (muszą!) pojawić się kłopoty – już równanie $x^3 - 7x + 6 = 0$ zaskoczy nas niespodzianką – wzory się „zatną", choć są oczywiste pierwiastki -3, 1, 2. Bo samo sprawne myślenie do tworzenia matematyki nie wystarczy – aby wzory Tartaglii udoskonalić tak, by działały zawsze, potrzebny jest sprawny matematyczny warsztat, ale początek został zrobiony przez cięcie sześcianu.

Wielokąt foremny



Euklides po narysowaniu pięciokąta foremnego i trójkąta równobocznego (czyli też foremnego), które są wpisane w ten sam okrąg i mają wierzchołek wspólny, zauważył, że jeden z łuków wyznaczonych przez ich wierzchołki to 1/15 okręgu. Zatem gdy umiemy skonstruować pięciokąt foremny i trójkąt równoboczny (a to umiał i niektórzy spośród nas też umieją), umiemy też skonstruować piętnastokąt foremny. Ten wniosek z obserwacji obrazka był kluczowy dla sprawy konstruowalności wielokątów foremnych. Idąc bowiem dalej tym tropem, Euklides stwierdził, że jeśli umiemy skonstruować n-kąt foremny i m-kąt foremny, a przy tym n i m nie mają wspólnych dzielników, to rysując je wpisane w ten sam okrąg i tak, by miały wspólny wierzchołek, otrzymamy na okręgu łuk stanowiący jego nm-tą część, a więc będziemy umieli skonstruować nm-kąt foremny. Stąd już niedaleko do niepoprawialnego do dziś twierdzenia:

jeśli umiemy skonstruować p_i-kąt foremny dla różnych liczb pierwszych p_i, $i = 1, \ldots, m$, to konstruowalne są n-kąty foremne, dla których

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m,$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną.

Gauss i Wanzel udowodnili, dla jakich liczb pierwszych jest spełnione powyższe *jeśli*, efektywnie znaleziono dotychczas 5 takich liczb i nie wiadomo nic więcej o tym, ile ich jest.

Jak widać, dystans, jaki dzieli podziwiany przez Euklidesa obrazek od do dziś nierozstrzygniętych pytań, jest niewielki.

Liczby pierwsze

Euklides i liczby pierwsze nasuwają kolejną, gardnerowską w stylu, obserwację. Otóż właśnie Euklides zauważył, że przypuszczenie, iż 2, 3 i 5 to wszystkie liczby pierwsze, prowadziłoby do sprzeczności nawet wtedy, gdybyśmy nic o innych liczbach nie wiedzieli. Bowiem wtedy liczba

$$31 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$$

nie mogłaby istnieć: nie byłaby pierwsza (bo założyliśmy, że pierwsze są tylko wymienione trzy). Nie byłaby też złożona, bo przez żadną liczbę pierwszą (czyli 2, 3, 5) nie dzieli się.

A morał z tego taki, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, bo gdyby ich lista była skończona i miała długość n (które, oczywiście, mogłoby być bardzo duże), to w analogiczny sposób wykluczałaby istnienie liczby

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

31 to liczba pierwsza. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ to też liczba pierwsza. Można by z tego wysnuć wniosek, że *powiększony o 1 iloczyn każdej liczby początkowych liczb pierwszych jest liczbą pierwszą*, ale byłby to wniosek fałszywy, choć bardzo długo otrzymuje się faktycznie liczby pierwsze. Chwała Euklidesowi (choć pewnie nie dotarł do miejsca, gdy otrzymana liczba okazuje się złożona), że w tę pułapkę nie wpadł. Polecam sprawdzenie, kiedy po raz pierwszy otrzymuje się w ten sposób liczbę złożoną.

Uznajmy więc pogląd, że Gardner uczy myślenia matematycznego, za dowiedziony, ale zadajmy pytanie,

czy można tak uczyć w szkole?

Faktycznie są to trzy pytania:

czy uczniowie uzyskaliby na tej drodze znajomość podstawowych faktów matematycznych?

czy takie wykształcenie matematyczne byłoby społecznie bardziej przydatne od realizowanego obecnie?

czy potrafilibyśmy to zrobić?

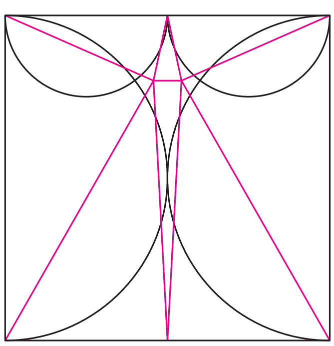
Zacznijmy od pierwszego. Oto przykład.

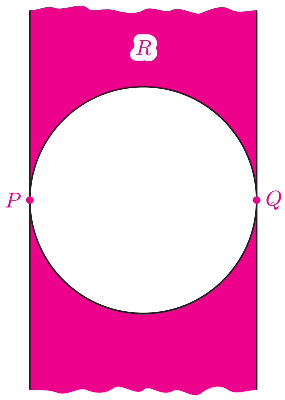
Podział kwadratu

Poniższe zadanie wywodzi się z tzw. folkloru i ma tę cechę, że wielu matematyków uważa, iż to oni je pierwsi rozwiązali (w tej liczbie zarówno Gardner, jak i ja). Jest to, oczywiście, raczej niemożliwe, ale wskazuje na wysoką atrakcyjność problemu.

Podziel kwadrat na trójkąty ostrokątne.

Rozwiązanie (ciekawe, że identyczne u wszystkich „autorów") jest obok.





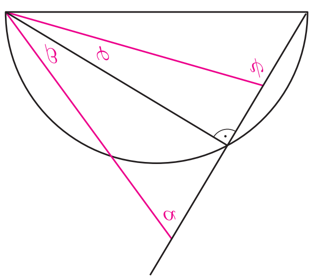
Uzyskuje się w ten sposób podział na osiem trójkątów. Żmudnie można dowieść, że na mniej się nie da.

Ale na czym polega „szkolność” tego przykładu? Na tym, że jest to okazja do sprowokowania uczniów do własnego odkrycia kilku standardowych, podręcznikowych twierdzeń.

Po dłużej lub krócej trwającym zmaganiu się klasy z zadaniem (i ewentualnym podaniu jego rozwiązania) pytamy: ale dlaczego tak? Po co te okręgi? I proponujemy, aby pogłębić naszą wiedzę na temat trójkątów ostrokątnych. Stawiamy problem:

Mamy punkty P i Q. Gdzie leżą takie punkty R, że trójkąt PQR jest ostrokątny?

Wynikiem jest widoczna obok figura. I znów pytamy: dlaczego akurat taka? Trzymając się poprzednich konwencji, i tę odpowiedź podam lustrzanie.



Jeśli uczniowie wiedzą, że kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty, to dalej posługujemy się rysunkiem obok. Na nim mamy (wykorzystując informację, że suma kątów w trójkącie jest 180°)

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

więc kąt α jest ostry, oraz

$$\varphi + 90^\circ = \psi,$$

więc kąt ψ jest rozwarty.
Boczne ograniczenia z pewnością uczniowie uzasadnią sami.

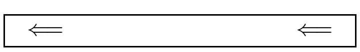
I poprzestańmy na tym (przecież nie jedynym) przykładzie.

Pytanie drugie. Tu odpowiedź można zasugerować dwoma przykładami.

Nikt nie sądzi, że budowniczowie katedr gotyckich uprawiali lub przynajmniej znali geometrię na poziomie choćby Euklidesa, o Archimedesie nie wspominając. A to, co stworzyli, jest najpiękniejszym zastosowaniem geometrii wszech czasów. Oni geometrii nie znali – oni myśleli geometrycznie.

Każdy pas transmisyjny używany na dzisiejszej polskiej wsi jest wstęgą Möbiusa, co łatwo sprawdzić. Rzecz jasna, nikt tego nie wie – bo i po co? Wystarczy, że wszyscy wiedzą, że takie pasy ścierają się dwa razy wolniej od walcowych.

Zapewne wielu z Czytelników miało problem w wytłumaczeniu swoim dzieciom, uczniom, słuchaczom czy znajomym, jak z paska papieru zrobić wstęgę Möbiusa. Gardnerowskie podejście jest takie, by nie dać im możliwości popełnienia błędu. W tym celu należy poprosić o narysowanie na pasku strzałek, jak poniżej,



a następnie o złożenie paska tak, by strzałki dotykały się „całym ciałem”. Sprawdziłem to po raz pierwszy na dwustu niematematykach – wszyscy natychmiast uzyskali wstęgę.

Bo – powtórzę istotę gardnerowskiego podejścia do matematyki – trzeba ją znać, gdy chce się ją tworzyć; natomiast gdy się chce w pełni korzystać ze stworzonych w oparciu o nią urządzeń, struktur, koncepcji, nie trzeba jej znać, ale trzeba myśleć matematycznie.

I w tym miejscu uważam, że mogę napisać, iż tytułowa teza została udowodniona. Jeden z moich przyjaciół głosił, że *dobrym kupcem bawełny nie jest ten, kto nią dobrze handluje, lecz ten, kto dba o rozwój handlu bawełną.* Sądzę, że ta myśl da się zastosować do Gardnera.

Pozostaje pytanie trzecie. Dzisiaj odpowiedzią na nie jest z całą pewnością **nie**. Jednak zarówno pomysł, by z wszystkich uczynić mniej lub bardziej sprawnych matematyków, jak pomysł, by traktować matematykę tak, jak za czasów mojej młodości traktowano w szkole łacinę (nieważne, że nieprzydatna, ale jak dyscyplinuje umysłowo!), nie nadają się do obrony. I nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć matematycznego myślenia, bo to jest opłacalne – tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów. I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę.

Pewnie to nie będzie zaraz. Ale będzie, czego jestem tak pewien, jak tego, że swego czasu Pitagoras zapoczątkował istnienie dewiantów, zwanych matematykami (choć też przy tym nie byłem).

Marek KORDOS