Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 601 ($WT = 1{,}57$) i 602 ($WT = 2{,}18$) z numeru 5/2010

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	43,92
Janusz Olszewski	Warszawa	41,94
Piotr Kumor	Olsztyn	40,19
Bartłomiej Dyda	Wrocław	37,34
Michał Kieza	Warszawa	36,46

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 613, 614

Redaguje Marcin E. KUCZMA

613. Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

614. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne x, niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 614 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

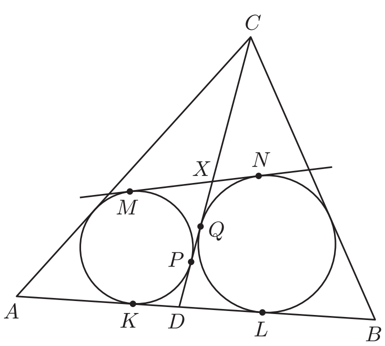
Przypominamy treść zadań:

605. Rozwiązać równanie $x^3 + x^2 = 16 + 2^y$ w liczbach całkowitych x, y.

606. Dany jest trójkąt ABC. Rozważamy punkt D, zmieniający swoje położenie na boku AB. Prosta styczna do okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD, rozłączna z odcinkiem AB, przecina odcinek CD w punkcie X. Udowodnić, że wszystkie uzyskane w ten sposób punkty X leżą na pewnym okręgu.

605. Łatwo sprawdzić, że wartość wyrażenia $x^3 + x^2 - 16$ może dać przy dzieleniu przez 7 wszystkie reszty z wyjątkiem 2 oraz 4. Potęgi dwójki dają jedynie reszty 1, 2, 4. Rozważane równanie może więc być spełnione tylko wtedy, gdy $2^y \equiv 1 \pmod 7$; to zaś ma miejsce jedynie dla wykładników y podzielnych przez 3.

Jeśli więc równanie $x^3 + x^2 - 16 = 2^y$ jest spełnione, to 2^y jest sześcianem liczby całkowitej. Dla liczb całkowitych $x > 4$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ leży pomiędzy x^3 a $(x+1)^3$, więc nie jest sześcianem. Dla $x < 3$ wartość $x^3 + x^2 - 16$ jest ujemna. Dla $x = 3$ dostajemy równanie sprzeczne $20 = 2^y$. Pozostaje wartość $x = 4$, która wraz z $y = 6$ daje jedyne rozwiązanie równania.



606. Przyjmijmy, że okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD są styczne do boku AB odpowiednio w punktach K i L; do prostej przechodzącej przez X – odpowiednio w punktach M i N; zaś do odcinka CD – odpowiednio w punktach P i Q.

Punkty styczności z okręgiem wpisanym w trójkąt wyznaczają na jego bokach odcinki o długościach wyrażających się znanymi wzorami:

$$|DK| = \frac{|AD| + |CD| - |AC|}{2}, \qquad |DL| = \frac{|BD| + |CD| - |BC|}{2}.$$

Po dodaniu stronami:

$$|KL| = |CD| - \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

Odnotujmy także zależności

$$|DX| = \frac{|DP| + |PX|}{2} + \frac{|DQ| + |QX|}{2} = \frac{|DK| + |MX|}{2} + \frac{|DL| + |NX|}{2} = \frac{|KL| + |MN|}{2}.$$

Odcinki KL i MN są symetryczne względem wspólnej osi symetrii obu okręgów. Możemy zatem przepisać ostatnią równość jako $|DX| = |KL|$.

Z uzyskanych związków wnosimy, że

$$|CX| = |CD| - |DX| = |CD| - |KL| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2}.$$

To znaczy, że punkt X leży na okręgu o środku C i promieniu zależnym jedynie od trójkąta ABC, a nie od położenia punktu D na boku AB.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 500 ($WT = 1{,}21$) i 501 ($WT = 3{,}73$) z numeru 6/2010

Mateusz Łącki	Kraków	44,50
Jacek Piotrowski	Rzeszów	37,13
Tomasz Rudny	Warszawa	32,65
Jerzy Witkowski	Radlin	31,75
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,57
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57
Andrzej Idzik	Bolesławiec	26,47
Tomasz Wietecha	Tarnów	24,39

Witamy kolejnego członka naszego Klubu – p. Łąckiego.

Klub 44

Zadania z fizyki nr 510, 511

Redaguje Jerzy B. BROJAN

510. Masa wolframowego włókna żarówki wynosi $m = 0{,}02$ g, a ciepło właściwe wolframu $c = 160$ J/(kg · K). Gdy żarówka była zasilana stałym napięciem 230 V, jej opór wynosił 800 Ω, a temperatura włókna była równa 2500 K. Podłączono tę żarówkę do napięcia sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz i wartości skutecznej 230 V. Obliczyć przybliżoną głębokość modulacji promieniowania żarówki, tzn. wielkość $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$, gdzie I – moc promieniowania. Założyć, że przepuszczalność szkła żarówki nie zależy od długości fali.

Można wykorzystać także następujące dane: gdy stałe napięcie zasilające zmieniano w niewielkim zakresie i powoli, na każdy 1 wolt jego przyrostu opór żarówki zwiększał się o 2,5 Ω, a temperatura włókna zwiększała się o 0,7 K.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2011

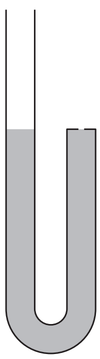
511. Pod wpływem różnicy ciśnień w rurce o stałym przekroju występuje stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bezwirowy) przepływ cieczy. Jeśli dwukrotnie zwiększymy średnicę rurki, nie zmieniając jej długości, różnicy ciśnień i rodzaju cieczy, to ile razy wzrośnie ilość cieczy przepływającej w ciągu jednostki czasu? Uzasadnić odpowiedź.

Wskazówka: Opory ruchu cieczy charakteryzuje współczynnik lepkości η zdefiniowany wzorem $\frac{F}{S} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$, gdzie F – siła działająca stycznie na powierzchnię cieczy S, wzdłuż której następuje poślizg warstw, $\mathrm{d}v$ – różnica prędkości warstw na odcinku $\mathrm{d}y$ prostopadłym do S.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2010

Przypominamy treść zadań:

502. Stożkowe naczynie ma niewielki otwór w wierzchołku stożka i taki sam otwór w jego podstawie. Jeśli po nalaniu do pełna wody czas opróżnienia naczynia w pozycji wierzchołkiem do dołu jest równy t_1, to ile wynosi t_2 – czas opróżnienia w pozycji wierzchołkiem do góry?



503. Rurka U-kształtna ma pole przekroju poprzecznego $S_1 = 5$ cm^2, a jedno z jej ramion (o wysokości $l = 20$ cm) jest zamknięte, z otworkiem o powierzchni $S_2 = 3$ mm^2. Rurkę napełniono wodą do poziomu zamknięcia (rys. 1), następnie wprowadzono przez otworek powietrze, tak że poziom w otwartym ramieniu podniósł się o $h = 5$ cm, po czym pozwolono wodzie opaść.

a) Na jaką wysokość H wytrysnęła woda przez otworek? Pominąć ściśliwość i lepkość wody, a także gęstość i lepkość powietrza.

b) Orientacyjnie oszacować wpływ czynników pominiętych w punkcie a) na wynik. Współczynnik ściśliwości wody jest równy $5 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}, lepkość wody wynosi 0,001 kg/(m · s), lepkość powietrza – $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg/(m · s).

502. Ze względu na małą lepkość wody możemy pominąć straty energii, a w takim razie prędkość v wypływu przez otwór jest równa $\sqrt{2gh}$ (gdzie h – wysokość słupa wody). Objętość wody wypływającej w ciągu jednostki czasu jest opisana wzorem

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Sv = S\sqrt{2gh},$$

gdzie S jest polem powierzchni otworu, z ewentualną korektą zależną od ostrości jego krawędzi (chodzi o efekt zwężania strumienia na zewnątrz). Podstawiamy tu $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}h$, gdzie A jest polem powierzchni wody w naczyniu, równym $A = A_0(h/H)^2$ w przypadku ustawienia wierzchołkiem do dołu, a $A = A_0((H-h)/H)^2$ w przypadku ustawienia odwrotnego (A_0 oznacza pole podstawy stożka, a H – jego wysokość). Całkowanie po czasie daje wyniki

$$t_1 = \frac{2}{5}\,\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}}, \qquad t_2 = \frac{16}{15}\,\frac{A_0}{S}\sqrt{\frac{H}{2g}},$$

zatem $t_2 = \frac{8}{3}t_1$.

503. Podniesienie poziomu wody w jednym ramieniu o h połączone z obniżeniem o tyle samo poziomu w drugim ramieniu oznacza zwiększenie energii potencjalnej o $\varrho g S_1 h^2$ (ϱ – gęstość wody). Z przyrównania tego wyrażenia do $\frac{1}{2}mv_1^2$ (gdzie $m = 2\varrho S_1 l$ jest masą całej wody) wyznaczamy prędkość v_1 uderzenia o zamknięty koniec

$$v_1 = h\sqrt{g/l} = 0{,}35 \text{ m/s}.$$

Jeśli woda w szerokiej części rurki nie zwolni w wyniku uderzenia, a pominiemy ściśliwość, to w otworku musi poruszać się z prędkością $v_2 = v_1 S_1/S_2 = 58$ m/s, zatem wzniesie się na wysokość

$$H = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{h^2}{2l}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = 174 \text{ m}.$$

Tę zaskakująco wielką wartość spróbujemy urealnić, uwzględniając różne zjawiska pominięte wyżej. W każdym z poniższych punktów bierzemy pod uwagę tylko jeden efekt.

a) Nadanie wodzie w otworku tak dużej energii kinetycznej musi nastąpić kosztem zmniejszenia prędkości reszty wody. Przyjmijmy, że pierwsza wyrzucona porcja wody ma wszystkie trzy wymiary jednakowego rzędu, czyli objętość ΔV rzędu $S_2^{3/2}$. Z przyrównania początkowej energii potencjalnej do sumy energii kinetycznych $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2$ znajdujemy skorygowane v_1 i v_2, a dalej

$$H = \frac{S_1 h^2}{2lS_2^2/S_1 + S_2^{3/2}} = 101 \text{ m}.$$

b) Ściśliwość wody oznacza, że nawet w przypadku otworka pomijalnie małego ciśnienie p w chwili zatrzymania słupa wody nie wzrośnie nieograniczenie, lecz tylko do wartości wynikającej z rozchodzenia się w niej fali dźwiękowej, tzn. z zatrzymywania i sprężania kolejnych warstw wody. W przedziale czasu Δt zatrzymaniu ulega odcinek Δh słupa wody, którego objętość jest równa $V = S_1\Delta h$, a zmiana tej objętości spowodowana wzrostem ciśnienia o p wynosi $\Delta V = \beta V_p = \beta p S_1 \Delta h$ (gdzie β – współczynnik ściśliwości); z drugiej strony przemieszczenie niesprężonego słupa wody wynosi $v_1\Delta t$, więc $\Delta V = v_1 S_1 \Delta t$. Gdy do II zasady dynamiki $F = \Delta p/\Delta t$ podstawimy $F = pS_1$, $\Delta p = v_1\Delta m = v_1\varrho V$, otrzymamy

$$p = v_1\sqrt{\varrho/\beta}.$$

(To rozumowanie jest zwykle wykorzystywane do wyprowadzenia wzoru na prędkość fali dźwiękowej.) Z równania Bernoulliego wynika prędkość wypływu wody

$$v_2 = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}} = \frac{\sqrt{2v_1}}{\sqrt[4]{\varrho\beta}} = 31 \text{ m/s}.$$

Jest to nieprzekraczalna wartość prędkości wypływu przez najmniejszy nawet otworek. Odpowiednia wartość H wynosiłaby 50 m.

c) Lepkość wody oznacza wystąpienie siły oporu w czasie jej opadania. Podstawiamy orientacyjne dane: $S = 0{,}015$ m^2 (powierzchnia boczna walca o długości $2l$ i promieniu równym połowie promienia rurki), $\Delta z = 0{,}013$ m (promień rurki), $\Delta v = 0{,}25$ m/s (średnio) i otrzymujemy siłę oporu równą $3 \cdot 10^{-4}$ N. W porównaniu z początkową wartością siły wprawiającej wodę w ruch, równą ciężarowi 10-centymetrowego słupa wody (0,5 N), jest to mniej niż 1/1000, więc efekt można uznać za nieistotny.

d) Lepkość powietrza da o sobie znać w okolicy otworka. Zakładając prędkość równą 40 m/s i przybliżenia podobne do poprzednich, otrzymuje się opór rzędu 10^{-5} N, czyli jeszcze mniej niż w punkcie c).

e) Niezerowa gęstość powietrza oznacza, że do wypchnięcia go przez otworek potrzebna jest pewna nadwyżka ciśnienia, która hamuje podnoszenie się poziomu wody. Dla prędkości 40 m/s i gęstości 1,3 kg/m^3 to ciśnienie wynosiłoby 1000 Pa, czyli siła hamująca 0,5 N – tyle samo, ile maksymalna siła wprawiająca w ruch wodę. Jest to obok punktu b) najważniejszy efekt zmniejszający realną wartość H. Numeryczne całkowanie równania ruchu wody dało wynik $v_1 = 0{,}11$ m/s, stąd $v_2 = 18{,}3$ m/s i $H = 17$ m.

f) Z gęstością powietrza związana jest też siła oporu działająca na wystrzeloną porcję wody... ale na dalsze oszacowania nie ma już miejsca na tej stronie.