Kącik przestrzenny (6)

Czworościany ortocentryczne

Tym razem, zgodnie z obietnicą, kącik poświęcimy czworościanom ortocentrycznym. Jak wiadomo, nie w każdym czworościanie istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości. Czworościany mające taki punkt nazywane są *ortocentrycznymi*. Spróbujmy opisać je dokładniej.

Twierdzenie 1. *Dla każdego czworościanu następujące warunki są równoważne*:

(a) *istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości*,
(b) *przeciwległe krawędzie są prostopadłe*,
(c) *sumy kwadratów długości przeciwległych krawędzi są równe*,
(d) *równoległościan opisany na czworościanie jest rombościanem*,
(e) *środki krawędzi leżą na jednej sferze*,
(f) *biśrodkowe są równej długości*,
(g) *kwadrat długości każdego odcinka łączącego środki przeciwległych krawędzi jest równy sumie kwadratów ich długości podzielonej przez* 4,
(h) *iloczyny cosinusów przeciwległych kątów dwuściennych są równe*.

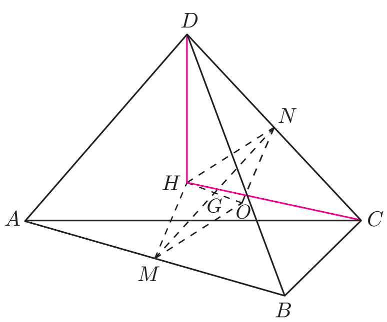
Biśrodkowe, czyli odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu, pojawiły się w trzecim odcinku kącika przestrzennego (*Delta* 5/2010).

Dowód równoważności tych własności warto potraktować jako zadanie; rozwiązanie można znaleźć na internetowej stronie *Delty*.

Udowodnimy teraz pewną własność czworościanów ortocentrycznych analogiczną do prostej Eulera na płaszczyźnie, czyli prostej przechodzącej przez środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum danego trójkąta.

O prostej Eulera pisaliśmy ostatnio w numerze 1/2009.

1. *Środek ciężkości czworościanu ortocentrycznego, jego ortocentrum i środek sfery na nim opisanej leżą na jednej prostej, a ponadto środek ciężkości jest środkiem odcinka łączącego pozostałe dwa wymienione punkty.*



Rozwiązanie. W czworościanie ortocentrycznym $ABCD$ niech O będzie środkiem sfery opisanej, a M i N – środkami krawędzi AB i CD. Przez G oznaczmy środek odcinka MN, czyli środek ciężkości czworościanu $ABCD$. Niech H będzie punktem symetrycznym do O względem G (rysunek). Punkty O, G, H leżą wtedy na jednej prostej, a G jest środkiem odcinka OH. Wobec tego chcemy wykazać, że H jest ortocentrum czworościanu $ABCD$.

Zauważmy, że czworokąt $MONH$ jest równoległobokiem. W szczególności proste OM i HN są równoległe. Z definicji punktów O i M wynika, że odcinki OM i AB są prostopadłe, więc również $HN \perp AB$. Stąd i z prostopadłości prostych AB i CD ($ABCD$ jest ortocentryczny!) wynika, że płaszczyzna CDH jest prostopadła do prostej AB. W takim razie prosta DH jest prostopadła do prostej AB. Analogicznie dowodzimy, że DH jest prostopadła również do prostej BC.

To zaś oznacza, że jest prostopadła do całej płaszczyzny ABC, czyli stanowi wysokość czworościanu $ABCD$. Podobnie dowodzimy, że proste AH, BH, CH są wysokościami rozpatrywanego czworościanu, co kończy dowód.

Na koniec zadanie dla Czytelników.

2. *Wykazać, że w czworościanie ortocentrycznym środki ciężkości ścian, spodki wysokości czworościanu oraz punkty dzielące odcinki łączące ortocentrum czworościanu z jego wierzchołkami w stosunku* $2:1$ (*licząc od wierzchołków*) *leżą na jednej sferze.*

Wskazówka: jaka jest średnica tej sfery?

Jest to *sfera dwunastu punktów* – przestrzenny odpowiednik okręgu dziewięciu punktów, czyli okręgu przechodzącego przez środki boków danego trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum.

O okręgu dziewięciu punktów i sferze dwunastu punktów można przeczytać w *Delcie* 3/1999.

Więcej zadań o czworościanach ortocentrycznych można znaleźć na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA