Gardner i liczby szczęśliwe

Nie wiem, czy wielu Czytelników *Delty* słyszało o szczęśliwych liczbach. Nie chodzi tu o to, że często siódemkę uważa się za liczbę szczęśliwą, trzynastkę zaś za pechową, ale o matematyczne pojęcie. Ja o liczbach szczęśliwych, ich rozmaitych własnościach oraz pewnych hipotezach dowiedziałem się z artykułu Martina Gardnera w kwartalniku *The Mathematical Intelligencer* w roku 1997. Okazuje się, że trzynastka też jest szczęśliwa.

Wiadomo, na czym polega metoda sita Eratostenesa, dzięki której znajdujemy liczby pierwsze. No to spróbujmy postąpić podobnie:

Wypisujemy wszystkie liczby naturalne od jedynki, po czym usuwamy co drugą (czyli wszystkie parzyste).

W tym, co zostanie, usuwamy co trzecią, czyli z ciągu $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$ wyrzucamy $5, 11, 17, 23, \ldots$ i pozostaje: $1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 27, 31, \ldots$

Ale uwaga – usuwaliśmy liczbę co trzecią nie dlatego, że jest po dwójce, ale dlatego, że 3 była DRUGĄ liczbą w ciągu, na którym dokonywaliśmy operacji! Co teraz? Teraz popatrzmy, jaka liczba jest na TRZECIM miejscu w nowo otrzymanym ciągu. Siódemka. Usuwamy więc **co siódmą** liczbę; pierwszą wyrzuconą będzie 19. Z nowego ciągu usuwać będziemy liczbę co dziewiątą, bo w nim na CZWARTYM miejscu jest dziewiątka. I tak dalej, w nieskończoność. Liczby, które zostaną, to liczby szczęśliwe. Widzimy, że wśród nich jest trzynastka.

Można odnieść wrażenie, że jest to taka sobie dość dziwna zabawa. Przeczy temu jednak nazwisko pomysłodawcy tej konstrukcji... O nim za chwilę.

Liczb szczęśliwych jest nieskończenie wiele. Mają pewne ciekawe własności. Choćby taką, że ich „gęstość” w zadanym przedziale jest zaskakująco bliska „gęstości” liczb pierwszych. Na przykład, wśród liczb od 1 do 100 są 23 pierwsze i 25 szczęśliwych. Podobnie jest z „bliźniaczymi liczbami szczęśliwymi” (czyli różniącymi się o 2) i liczbami pierwszymi bliźniaczymi.

Są też otwarte problemy. Na przykład, czy każda liczba parzysta jest sumą dwóch liczb szczęśliwych (niektórym Czytelnikom chyba ten problem coś przypomina)? Sprawdzono komputerowo co najmniej do 100 tysięcy – nie znaleziono wyjątku...

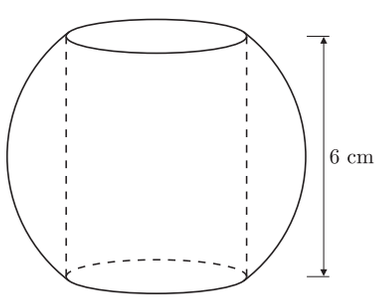
O tym, że liczb szczęśliwych jest nieskończenie wiele, można się przekonać, rozumując podobnie jak w słynnym dowodzie Euklidesa dla liczb pierwszych. Ale na pytanie, czy liczb, które są jednocześnie pierwsze i szczęśliwe, jest nieskończenie wiele, jeszcze niedawno nie znano odpowiedzi i nic nie wiem o tym, by to się zmieniło...

Charles Ashbacher postawił hipotezę, że każda liczba szczęśliwa jest „końcówką” większej liczby szczęśliwej. Na przykład, liczbą 7 kończy się 37, liczbą 13 kończy się 613. To też wciąż jedynie hipoteza.

W artykule Gardnera, o którym mowa na początku, czytamy: *The notion of lucky numbers originated about 1955 with Stanislaw Ulam, the great Polish mathematician* [...] Ulam wyjechał z Polski na stałe w roku 1935, w wieku 26 lat, i do końca życia, do roku 1984, żył i pracował w USA. Zagraniczni autorzy piszą zazwyczaj „American mathematician”, w najlepszym razie „Polish-born American mathematician”. A Gardner napisał „polski matematyk”. To miłe.

Krzysztof CIESIELSKI
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Kula i dziura



Przytoczmy za Martinem Gardnerem następujące zadanie. W kuli wywiercono na wylot otwór w kształcie walca o wysokości 6 cm, przechodzący przez środek kuli. Jaka jest objętość pozostałej części kuli? Gardner nazwał to zadanie „niewiarygodnym problemem”. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że danych jest za mało. A może to właśnie jest pewną wskazówką? Zadanie można rozwiązywać metodami klasycznymi, można wykorzystać rachunek całkowy, ale można też zastanowić się chwilę i rozwiązać je bez żadnych rachunków. Dodajmy jeszcze, być może dla ułatwienia, że powinno wyjść 36π cm^3. Czy wiesz, Czytelniku, jak to rozwiązać? A może znasz podobne zadania?

Jedno z intuicyjnych rozwiązań może wzbudzić pewne zaskoczenie u go. Jeśli istnieje jednoznaczne rozwiązanie, będzie ono zaprzeczeniem tej tezy, a więc jednoznaczne rozwiązanie, to objętość pozostałej części kuli jest stała, a więc pędzie taka sama, gdy przyjmiemy, że promień otworu jest zerowy. Łatwo to, że objętość pozostałej części pędzie równa objętości kuli o średnicy 6 centymetrów. (Wg Gardnera rozwiązanie to podał John W. Sambrell, wydawca Astronomy Science Fiction.) Proponujemy zwrócenie tego rozumowania pobrzeg przeprowadzenie szczegółowego rachunku, nie zapomnij się tym, że danych jest jakby za mało.

Zdzisław POGODA
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński