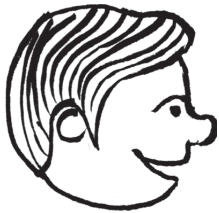




mała delta



Ziomkowie i Wszechświat

Wyobraźmy sobie małe, senne miasteczko na rubieży kresów, zamieszkane przez N osób. Wszystkie te osoby się znają, mieszkają tutaj przecież od zawsze. W niedzielne popołudnie wszyscy wychodzą na rynek i przechadzają się. Ludzie ci są nieskomplikowani, każdy może być w jednym z dwóch stanów psychicznych, tj. albo wesoły (takich będziemy oznaczać przez ☺, a ich liczbę przez $N_{☺}$), albo smutny (na tych dobrym oznaczeniem będą odpowiednio ☹ i $N_{☹}$). Prawa rządzące psychiką naszych bohaterów nie są nazbyt złożone, a każdy na pewno zna je z codziennych, chcianych czy nie, doświadczeń. Kiedy osobnik wesoły spotyka innego wesołego, w wyniku naglej i niepowstrzymanej zazdrości smutnieje, zatem zachodzi proces, który schematycznie możemy zapisać jako:



Kiedy człowiek smutny spotyka innego smutnego, w wyniku reakcji określanej z niemiecka jako *Schadenfreude*, czyli radość z cudzego nieszczęścia, momentalnie weseleje:



Nikogo pewnie nie zdziwi wiadomość, że przy spotkaniu człowieka wesołego ze smutnym żaden z nich nie zmieni swego stanu. Dodajmy jeszcze, że kontakty społeczne są raczej powierzchowne, toteż nie zdarzają się spotkania aż trzech lub więcej osób naraz, a szlak spaceru po rynku wynika raczej z przypadkowych kaprysów niż jakichś konkretnych, ustalonych przed wyjściem z domu planów. Co można powiedzieć o zmianach liczby wesołych i smutnych obywateli?

Prawdopodobieństwo tego, że człowiek wesoły posmutnieje w wyniku napotkania innego wesołego w ciągu ustalonego przedziału czasowego Δt , jest proporcjonalne do liczby innych wesołych, zatem

$$P(\text{☺} \rightarrow \text{☹}) = \alpha(N_{☺} - 1)\Delta t,$$

gdzie α jest ustalonym współczynnikiem proporcjonalności. Podobnie, prawdopodobieństwo poweselenia smutnego możemy napisać jako $P(\text{☹} \rightarrow \text{☺}) = \alpha(N_{☹} - 1)\Delta t$. Jeżeli zaś całkowitym szczęściem społeczeństwa nazwiemy różnicę między liczbą obywateli wesołych i smutnych, to zmianę szczęścia możemy oszacować przez

$$\Delta S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (N_{☹}P(\text{☹} \rightarrow \text{☺}) - N_{☺}P(\text{☺} \rightarrow \text{☹})),$$

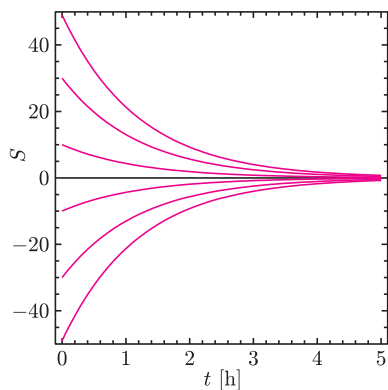


Rozwiązanie zadania F 778.

Ponieważ źródło światła znajduje się w ognisku zwierciadła, więc na prawą stronę płytki pada prostopadle strumień światła odbitego od takiej samej powierzchni zwierciadła co powierzchnia płytki. Ze względu na małe rozmiary płytki można zaniedbać zmianę kąta padania światła z lewej strony. Zatem szukany stosunek wynosi

$$\frac{2l(r^2/4 + h^2)^{3/2}}{r(l^2 + h^2)} \approx \frac{lr^2}{4(l^2 + h^2)^{3/2}}$$

dla $h \ll r$.



Rys. 1. Ewolucja czasowa szczęścia S opisywanego wzorem (1) dla różnych wartości S_0 przy stałej α równej $0,25/\text{min}$ oraz $N = 100$.

gdzie czynnik $\frac{1}{2}$ zapobiega policzeniu każdego spotkania dwóch osób dwukrotnie, natomiast czynnik 4 uwzględnia zmianę szczęścia o 4 jednostki przy spotkaniu zmieniającym stany psychiczne. Podstawiając obliczone uprzednio prawdopodobieństwa i zakładając, że liczba osób jest na tyle duża, że możemy zaniedbać odejmowanie jedynki w tych wynikach, otrzymujemy:

$$\Delta S = -2\alpha N S \Delta t.$$

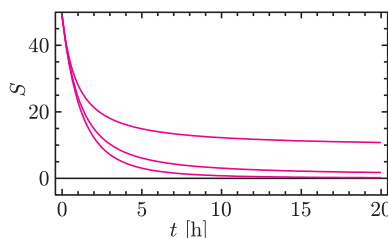
Zatem zmiana wielkości S w jednostce czasu jest wprost proporcjonalna do tej wielkości, co oznacza, że całkowite szczęście jest opisywane funkcją wykładniczą:

$$(1) \quad S(t) = S_0 e^{-2\alpha N t},$$

gdzie S_0 jest wartością początkową szczęścia. Wykres takiej funkcji dla różnych warunków początkowych pokazany jest na rysunku 1. Niezależnie od początkowego szczęścia miasteczka po upływie niezbyt długiego czasu całkowite szczęście osiąga, niestety, wartość bliską zeru.

W sąsiednim miasteczku panują trochę inne zwyczaje. Procesy psychiczne u ludzi przebiegają, oczywiście, tak samo, ale w niedzielne popołudnia mieszkańcy nie spacerują po rynku, tylko wybierają się na długie wędrowki po okolicznych lasach i łąkach, tak że zajmowany przez nich teren powiększa się w miarę upływu czasu, aż do zapadnięcia zmierzchu, kiedy to wszyscy samotnie wracają do domu. Jak zmienia się całkowite szczęście owego miasteczka?

Zanim postaramy się to opisać mądrym wzorem, zastanówmy się, czym różni się dynamika spotkań międzyludzkich w obu miasteczkach. Nietrudno zauważyć, że w pierwszym obywatele zajmują stałą powierzchnię, podczas gdy w drugim powierzchnia ta się powiększa, a co za tym idzie, prawdopodobieństwo spotkania maleje. W pewnej chwili może ono osiągnąć wartość tak małą, że żadne dwie osoby nie spotkają się już przed wieczornym powrotem do domu – a wartość szczęścia przestanie się w praktyce zmieniać, osiągając pewną niezerową wartość. W naszym prostym modelu odpowiada to przyjęciu *malejącego* z czasem współczynnika α . Dla pewnego szczególnego wyboru



Rys. 2. Ewolucja czasowa szczęścia S z funkcją $\alpha(t)$ opisywaną wzorem (2) dla różnych wartości $t_0 = -2, -5, -10$ h (od góry do dołu) przy $\alpha_0 = 0,25/\text{min}$, $N = 100$ oraz $S_0 = 49$.

$$(2) \quad \alpha(t) = \frac{\alpha_0}{(t/t_0 - 1)^2}$$

otrzymujemy rozwiązania przedstawione na rysunku 2.

Gdzie szukać takich miasteczek, chciałby pewnie wiedzieć Czytelnik Lubiący Konkrety. Czas przyznać się, że opowiadanie tu przedstawione jest po prostu metaforą: drugim miasteczkiem jest wczesny Wszechświat, ludzie weseli i smutni to określony rodzaj cząstek i antycząstek, oddziaływania polegają zaś na zamianie par cząstek w pary antycząstek, natomiast ustalone szczęście odpowiada ustalonej liczbie cząstek i antycząstek w pewnym obszarze Wszechświata. Co prawda, znane cząstki nie mają aż tak prostych oddziaływań, ale nie jest trudno poprawić taki model, by uwzględniał np. procesy anihilacji danego rodzaju cząstek i antycząstek w jakieś inne cząstki, które z powodu zachowania energii nie będą już mogły wytworzyć wyjściowej pary...

Czemu rozmyślać o takich rzeczach? Według obecnej wiedzy istnienie materii, z której jesteśmy zbudowani, oraz ciemnej materii wypełniającej Wszechświat wiąże się z ustaniem oddziaływań zmieniających liczbę tych cząstek w pewnych momentach ewolucji Wszechświata. Nieznane pozostaje wszakże wiele konkretnych szczegółów...

Małą Deltę przygotował Krzysztof TURZYŃSKI