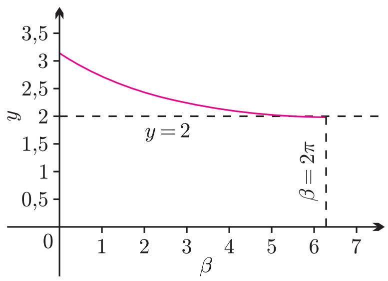


Rys. 5. Wykres funkcji $\widetilde{\pi}(\beta)$ dla okręgów równoleżnikowych stożka obrotowego.

dla trójkąta CSA:

$$d(l,\beta)^2 = AC^2 = AS^2 + CS^2 - 2AS \cdot CS \cdot \cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) = 2l^2\left(1 + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Teraz możemy obliczyć $\widetilde{\pi}$:

$$\widetilde{\pi}(l,\beta) = \frac{L(l,\beta)}{d(l,\beta)} = \frac{2\pi - \beta}{\sqrt{2\left(1 + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}}.$$

Okazuje się, że wartość funkcji $\widetilde{\pi}$ nie zależy od l, czyli na każdym stożku wszystkie równoleżniki mają ten sam stosunek długości okręgu do średnicy. Ale ta liczba jest różna dla różnych stożków – zależy od kąta β. Funkcja, którą możemy zapisywać teraz jako $\widetilde{\pi}(\beta)$, przyjmuje wartości z przedziału $(2, \pi)$ dla $\beta \in (0, 2\pi)$.

Czytelnik Wnikliwy z pewnością zapyta, co się zmieni, jeśli uwzględnimy też okręgi, które nie są równoleżnikami. Czy nadal stosunek długości okręgu do średnicy będzie stały na każdym stożku? Można zacząć od takiego zadania: na powierzchni bocznej stożka obrotowego o ustalonym kącie β dany jest okrąg o promieniu $r' > 0$ i środku S' niebędącym wierzchołkiem stożka. Czy okrąg równoleżnikowy o takim samym promieniu ma taką samą długość? Lub ogólniej, czy jest prawdą, że na powierzchni bocznej stożka obrotowego dla dowolnej liczby $r > 0$ istnieje nieskończenie wiele okręgów o promieniu r, ale różnej długości?

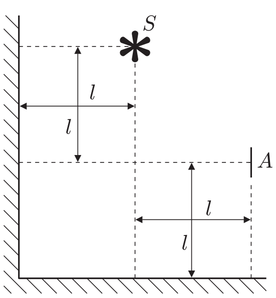
Obliczyliśmy, że funkcja $\widetilde{\pi}$ nie jest stała w ogólnym przypadku. Wobec tego nieostrożnie byłoby stwierdzić bez zastanowienia, że liczba π wyraża wartość stosunku długości okręgu do długości jego średnicy. Tak jest istotnie w geometrii euklidesowej na płaszczyźnie, do czego przyzwyczaja się nas niemal od początków nauki w szkole. Ale, jak widać, przenoszenie przyzwyczajeń z jednej, „ulubionej" geometrii na inne nie zawsze jest dobrym pomysłem.

W przedstawionych w artykule przykładach otrzymaliśmy wyłącznie wartości funkcji $\widetilde{\pi}$ nieprzekraczające π. Czy może się zdarzyć, że $\widetilde{\pi} > \pi$? Odpowiedzi proszę spróbować poszukać w geometrii hiperbolicznej.

Zadania

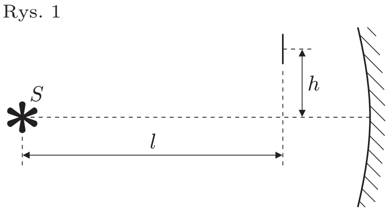
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 777. Dwa zwierciadła płaskie tworzą kąt dwuścienny równy 90°. Punktowe źródło światła S zostało umieszczone między zwierciadłami tak, że odległość od nich jest równa odpowiednio l i $2l$ (rys. 1). W odległości $2l$ od pionowego zwierciadła jest umieszczony ekran. Znaleźć natężenie oświetlenia w punkcie ekranu A odległym od poziomego zwierciadła o l. Światłość źródła S wynosi I.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 778. Przed zwierciadłem sferycznym o promieniu r, w którego ognisku znajduje się punktowe źródło światła S, w odległości l od ogniska znajduje się mała nieprzezroczysta płytka (rys. 2). Powierzchnia płytki jest prostopadła do osi optycznej zwierciadła, a płytka znajduje się na niewielkiej wysokości h nad tą osią. Znaleźć stosunek oświetlenia lewej i prawej strony płytki.
Rozwiązanie na str. 12



Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

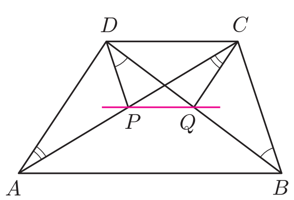
M 1297. Udowodnić, że w ciągu $2^n - 3$ występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 5 oraz nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 13, lecz nie występuje w nim liczba podzielna przez $5 \cdot 13$.
Rozwiązanie na str. 7

M 1298. Dane są trzy liczby nieparzyste a, b, c. Wykazać, że istnieje taka liczba nieparzysta d, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3

M 1299. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD (rys. 3). Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym

$$\sphericalangle PDB = \sphericalangle CBD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QCA = \sphericalangle DAC.$$

Wykazać, że prosta PQ jest równoległa do podstaw trapezu $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 6



Rys. 3