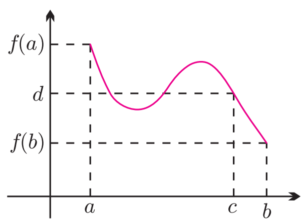
Własność Darboux w geometrii

Joanna JASZUŃSKA

Funkcja f, określona na pewnym przedziale i przyjmująca wartości rzeczywiste, jest *ciągła*, jeśli jej wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki.

Nie definiujemy formalnie ciągłości i nie uzasadniamy jej dla rozważanych funkcji, pozostajemy przy intuicjach.

Własność Darboux orzeka, że *jeśli wartości funkcji ciągłej na końcach pewnego przedziału są różne, to funkcja ta musi przyjmować w rozważanym przedziale wszystkie wartości pośrednie.* Ściślej, jeśli dla funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zachodzi, na przykład, $f(a) > f(b)$ (rys. 1), to dla dowolnej liczby rzeczywistej d, takiej że $f(a) \geqslant d \geqslant f(b)$, istnieje taki argument $c \in [a,b]$, że $f(c) = d$.



Rys. 1.

Zobaczmy kilka zastosowań własności Darboux w problemach geometrycznych.

1. Dane są funkcje ciągłe $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, przy czym $f(a) > g(a)$ oraz $f(b) < g(b)$. Uzasadnij, że w przedziale $[a,b]$ istnieje taki punkt c, że $f(c) = g(c)$ (rys. 2).

2. Czy dla każdego n istnieje ostrosłup prawidłowy n-kątny o polu P podstawy równym polu P' ściany bocznej?

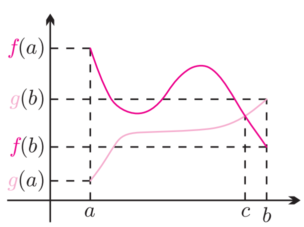
3. W oazach na pustyni (płaszczyźnie) jest tysiąc studni (punktów). Czy istnieje taka prosta, że 500 studni jest po jednej jej stronie, a pozostałe po drugiej?

4. Wewnątrz wielokąta znajduje się punkt A. Wykaż, że można znaleźć dwie proste równoległe, styczne do wielokąta (tzn. mające punkty wspólne z brzegiem wielokąta, ale nie z jego wnętrzem), które są jednakowo odległe od punktu A.

Rozwiązania

R1. Zdefiniujmy funkcję $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wzorem $h = f - g$. Wtedy $h(a) > 0 > h(b)$, więc z własności Darboux istnieje takie $c \in [a,b]$, że $h(c) = 0$, czyli $f(c) = g(c)$. □

Różnica funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.



Rys. 2. Wykresy funkcji ciągłych f i g o takich końcach muszą się przeciąć.

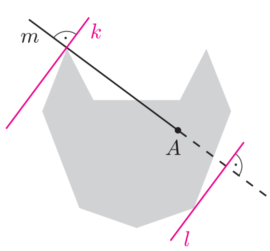
R2. Tak. Dla ustalonej podstawy rozważmy ostrosłup o tak małej wysokości h_1, by ściany boczne niemalże leżały na podstawie. Wtedy $P' \simeq \frac{P}{n} < P$. Gdy rośnie wysokość h ostrosłupa, rosną też wysokości ścian bocznych, a co za tym idzie – ich pola, pole P' jest wtedy ciągłą funkcją zmiennej h. Dla odpowiednio dużej wysokości h_2 mamy $P' > P$, więc z własności Darboux dla pewnej wysokości ostrosłupa pomiędzy h_1 a h_2 zachodzi $P' = P$. □

R3. Tak. Rozważmy wszystkie proste przechodzące przez co najmniej dwie studnie. Weźmy prostą m, która nie jest równoległa do żadnej z nich i wszystkie studnie są po jednej jej stronie (jest nieskończenie wiele takich m). Przesuwajmy m równolegle, niech m_x oznacza jej położenie po przesunięciu o x. Istnieje tak duże u, że wszystkie studnie są pomiędzy równoległymi prostymi m i m_u.

Niech $f(x)$ oznacza liczbę studni po ustalonej stronie prostej m_x, tak by $f(0) = 0$ i $f(u) = 1000$. Na żadnej prostej m_x nie leży więcej niż jedna studnia, bo tak wybrano kierunek m. Zatem wraz ze zmianą x od 0 do u prosta m_x „przekracza" studnie pojedynczo, czyli $f(x)$ przyjmuje kolejno wszystkie wartości od 0 do 1000. Istnieje więc takie c, że $f(c) = 500$ i na prostej m_c nie leży żadna studnia. □

f przyjmuje tylko wartości całkowite, więc nie jest funkcją ciągłą!

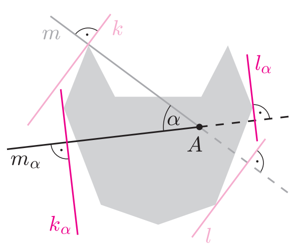
R4. Wybierzmy pewną półprostą m o początku w A i poprowadźmy dwie prostopadłe do niej styczne do danego wielokąta, k (przecinającą m) oraz l (rys. 3). Niech As oznacza odległość punktu A od prostej s. Załóżmy, że $Ak > Al$.



Rys. 3. Jeśli $Ak = Al$, to zadanie jest rozwiązane.

Obracajmy półprostą m i dla każdego jej położenia m_α (po obrocie o kąt α) rozważmy parę odpowiadających jej stycznych do wielokąta, k_α i l_α (rys. 4). Funkcje Ak_α i Al_α zmiennej α są ciągłe, $k_{180^\circ} = l$, $l_{180^\circ} = k$ i z założenia $Ak_{180^\circ} < Al_{180^\circ}$.

Skoro $Ak > Al$ oraz $Ak_{180^\circ} < Al_{180^\circ}$, to z zadania 1 istnieje taki kąt $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$, dla którego $Ak_\varphi = Al_\varphi$, co kończy dowód. □



Rys. 4

Zadania domowe

5. Czy dwie krawędzie boczne ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego mogą być prostopadłe?

6. Udowodnij, że dla dowolnej figury ograniczonej o polu 1 istnieje nieskończenie wiele prostych, które dzielą ją na dwie części o równych polach.

7. Wykaż, że dla dowolnego wielokąta istnieją cztery styczne, tworzące kwadrat.

Więcej o własności Darboux można przeczytać w artykule Witolda Bednarka w *Delcie* 10/2009.