Kącik przestrzenny (5)

Prostopadłość prostych i płaszczyzn

Piąty kącik poświęcimy prostopadłości prostych i płaszczyzn. Przy rozwiązywaniu zadań dotyczących tego tematu należy jedynie pamiętać o tym, że

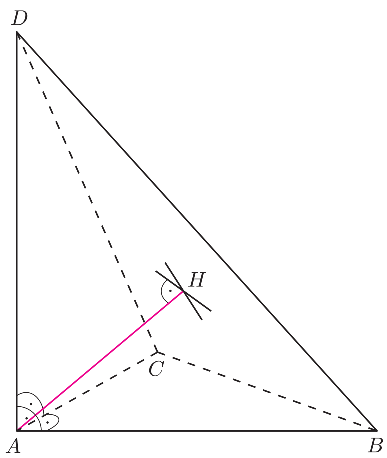
- jeśli dwie nierównoległe proste leżące w jednej płaszczyźnie są prostopadłe do trzeciej prostej, to cała płaszczyzna też jest prostopadła do niej;
- jeśli prosta jest prostopadła do pewnej płaszczyzny, to jest prostopadła do dowolnej prostej leżącej w tej płaszczyźnie.

Z definicji prosta jest prostopadła do płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej płaszczyźnie. Nietrudno jednak udowodnić, że na to, aby prosta była prostopadła do płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, aby była prostopadła do dwóch przecinających się prostych leżących w tej płaszczyźnie.

I to jest cała filozofia – wszystkie zadania o prostopadłości rozwiązuje się, posługując się tym schematem. Czasem należy tylko umieć wybrać, czy wygodniej będzie wykazać, że, na przykład, rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę spełnia jakieś warunki, czy odwrotnie – wziąć punkt na tej płaszczyźnie spełniający dane warunki i pokazać, że prosta łącząca go z punktem A jest prostopadła do tej płaszczyzny. Przy odrobinie praktyki jednak szybko nabierzemy wyczucia. Zacznijmy od prostego, ale bardzo użytecznego zadania.

Notacja $XY \perp ABC$ oznacza, że prosta XY jest prostopadła do płaszczyzny ABC.

1. *Wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykazać, że rzut prostokątny H punktu A na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD* (rys. 1).

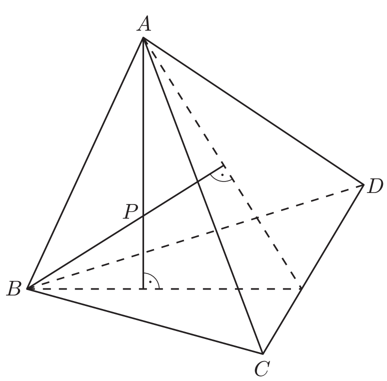


Rys. 1

Rozwiązanie. Skoro $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD = 90°$, to $BA \perp ADC$, a więc $BA \perp CD$. Ponadto $AH \perp BCD$, skąd $AH \perp CD$. Zatem płaszczyzna ABH jest prostopadła do prostej CD. W takim razie $BH \perp CD$. Analogicznie udowodnimy, że $CH \perp BD$. Zatem punkt H jest ortocentrum trójkąta BCD.

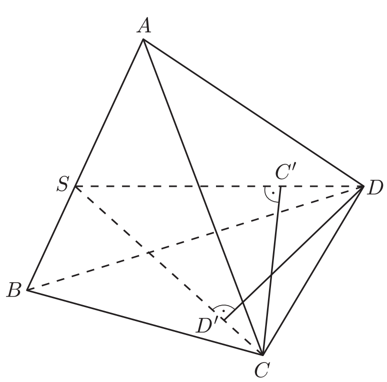
Warto ten fakcik sobie zapamiętać, bo nie raz dane nam będzie z niego skorzystać. Przejdźmy teraz do nieco trudniejszego zadania, w którym zobaczymy, jak wykorzystać prostopadłość prostych skośnych.

2. (OM 1-III-3) *Wykazać, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się, to również wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się.*



Rys. 2

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia wysokości czworościanu poprowadzonych z wierzchołków A i B (rys. 2). Mamy $AP \perp BCD$, więc też $AP \perp CD$ i analogicznie $BP \perp CD$. W takim razie płaszczyzna ABP jest prostopadła do krawędzi CD, w szczególności $AB \perp CD$. Na prostej AB wybierzmy taki punkt S, że $DS \perp AB$. Zatem płaszczyzna CDS jest prostopadła do krawędzi AB. Niech CC' i DD' będą wysokościami trójkąta CDS (rys. 3). Prosta CC' jest prostopadła zarówno do DS, jak i do AB (bo leży w płaszczyźnie prostopadłej do tej krawędzi). Jest więc wysokością czworościanu $ABCD$ poprowadzoną z wierzchołka C. Analogicznie dowodzimy, że również DD' jest wysokością danego czworościanu. Te dwie proste mają punkt wspólny będący ortocentrum trójkąta CDS. Dowód jest więc zakończony.



Rys. 3

Okazuje się w takim razie, że nie w każdym czworościanie istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości. Z naszego rozwiązania wynika bowiem, że wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \perp CD$ (z uwagi na symetrię dotyczy to również wysokości poprowadzonych z punktów C i D). Czworościany, w których wszystkie wysokości przecinają się w jednym punkcie, nazywamy *ortocentrycznymi*, ale o nich następnym razem.

Zadania

3. (OM 49-II-6) *Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.*

4. *Krawędź AD czworościanu $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny ABC. Wykazać, że rzut prostokątny ortocentrum trójkąta ABC na płaszczyznę BCD jest ortocentrum trójkąta BCD.*

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA