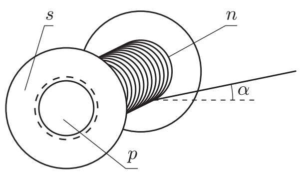
Ruch obrotowy bryły sztywnej, część I

Stanisław BEDNAREK

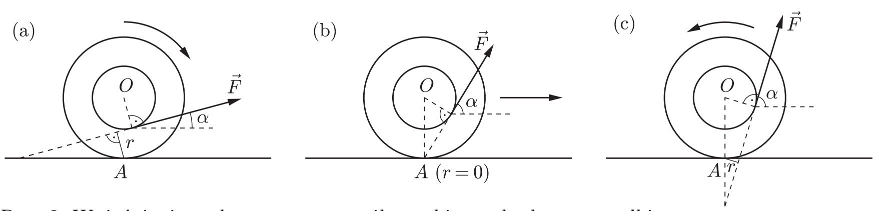
Celem doświadczeń opisanych w tym artykule będzie poznanie podstawowych prawidłowości rządzących ruchem obrotowym bryły sztywnej. Bryła sztywna to takie ciało, w którym odległości między jego każdymi dwoma punktami pozostają stałe, niezależnie od sił działających na to ciało. Jest to, oczywiście, pewna idealizacja teoretyczna, ale w praktyce wiele ciał z dobrym przybliżeniem spełnia to założenie – tak też będzie w naszych doświadczeniach. Często rozpatruje się sytuacje, w których ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu obrotowego oraz postępowego. Przykładem takiego ruchu jest toczenie się ciał, np. kół jadącego samochodu lub kulki po równi pochyłej.



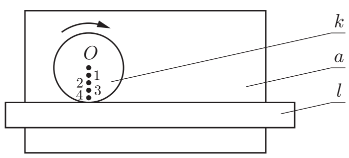
Rys. 1. Przygotowanie szpulki od przylepca do doświadczeń; s – szpulka, p – plastelina, n – nitka, α – kąt nachylenia nitki do poziomu.

Do przeprowadzenia naszych doświadczeń będą potrzebne: szpulka od przylepca medycznego, plastelina, nitka o długości około 1 m, arkusz papieru, trzy kawałki tektury, ołówek, cyrkiel, nożyczki, linijka o długości 50 cm i taśma klejąca.

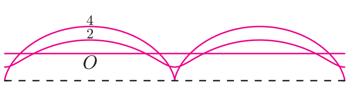
Wyniki pierwszego doświadczenia dadzą odpowiedź na pytanie, co jest potrzebne do spowodowania ruchu złożonego bryły sztywnej. Wiemy, że do wprawienia ciała w ruch postępowy oraz do zmiany wartości lub kierunku jego prędkości w tym ruchu potrzebne jest działanie siły. W pierwszym doświadczeniu przekonamy się, czy samo przyłożenie siły wystarczy do spowodowania ruchu złożonego bryły sztywnej. Na środkową część szpulki od przylepca (rolkę) nawijamy około 3/4 długości nitki. Otwór w rolce wypełniamy całkowicie plasteliną w celu zwiększenia masy szpulki. Ustawiamy szpulkę na poziomej powierzchni stołu. Chwytamy palcami za swobodny koniec nitki i wyprostowujemy ją, trzymając pod niewielkim kątem α (prawie równolegle) do powierzchni stołu (rys. 1). Co się stanie, kiedy zaczniemy coraz silniej ciągnąć swobodny koniec nitki? Sprawdźmy nasze przewidywania. Następnie powoli podnosimy koniec nitki do góry, zwiększając przez to kąt α i nadal pociągamy za nitkę. Obserwujemy, jak wpływa to na zachowanie się szpulki. Jeszcze bardziej zwiększamy kąt α (tak by stał się niemal kątem prostym). Co się przy tym zmieniło?



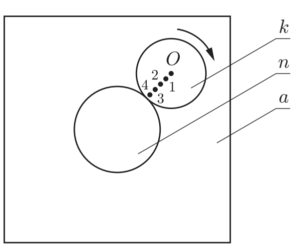
Rys. 2. Wyjaśnienie wpływu momentu siły na kierunek obrotu szpulki; $\vec{F}$ – siła, A – chwilowy środek obrotu szpulki, O – środek szpulki, r – ramię siły, α – kąt nachylenia kierunku działania siły do poziomu.



Rys. 3. Układ do badania torów punktów na kole, toczącym się bez poślizgu po linii prostej; k – koło, l – linijka, a – arkusz papieru, O – otwór w środku koła, $1, 2, 3, 4$ – otwory rozmieszczone wzdłuż promienia koła.



Rys. 4. Przykłady torów punktów na kole, toczącym się bez poślizgu w układzie z rys. 3; O – tor środka koła, 2 – tor wybranego punktu na promieniu koła (cykloida skrócona), 4 – tor punktu na brzegu koła (cykloida pełna).



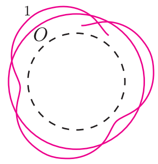
Rys. 5. Układ do badania torów punktów na kole toczącym się bez poślizgu po innym, nieruchomym kole; k – toczące się koło, n – nieruchome koło, a – arkusz papieru, O – otwór w środku toczącego się koła, $1, 2, 3, 4$ – otwory rozmieszczone wzdłuż promienia tego koła.

Przeprowadzone doświadczenie wykazało, że przy małym kącie nachylenia nitki do stołu szpulka toczy się w paradoksalny sposób – ciągnięta nitka nie jest rozwijana, ale nawija się na szpulkę (rys. 2(a)). Po zwiększeniu kąta α do pewnej wartości granicznej szpulka nie toczy się, tylko ślizga po powierzchni stołu (rys. 2(b)). Przy jeszcze większym kącie α szpulka zmienia kierunek toczenia i nitka odwija się ze szpulki (rys. 2(c)). Wniosek z tego doświadczenia jest taki, że do wprawienia bryły sztywnej w ruch obrotowy nie wystarczy tylko odpowiednio duża siła. Decydujące znaczenie ma wielkość zwana momentem siły. Wartość momentu siły M wyraża się wzorem

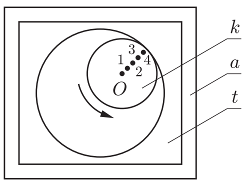
$$M = Fr, \tag{1}$$

gdzie F oznacza wartość siły, a r – jej ramię, czyli odległość między prostą, wzdłuż której działa siła, a osią, wokół której zachodzi obrót.

Obrót naszej szpulki podczas toczenia zachodzi wokół chwilowego środka obrotu. Jest nim punkt kontaktu szpulki ze stołem, oznaczony na rysunku 2 przez A. Patrząc na rysunek 2(a), zauważamy, że moment siły M obraca szpulkę w prawo i nić musi na nią się nawijać. Z rysunku 2(b) wynika, że moment siły M jest równy zeru, ponieważ kierunek działania siły przy danym kącie α przechodzi przez punkt A, więc r jest równe zeru. W tej sytuacji szpulka nie może się obracać, a jedynie przesuwać. Z kolei rysunek 2(c) pokazuje, iż moment siły M obraca szpulkę w lewo i nić się odwija.



Rys. 6. Przykłady torów punktów koła toczącego się w układzie z rys. 5; O – tor środka koła, 1 – fragment toru wybranego punktu na promieniu koła (epicykloida).



Rys. 7. Układ do badania torów punktów na kole toczącym się bez poślizgu po brzegu kołowego otworu; k – toczące się koło, t – nieruchoma tektura z kołowym otworem, a – arkusz papieru, O – otwór w środku toczącego się koła, $1, 2, 3, 4$ – otwory rozmieszczone wzdłuż promienia tego koła.

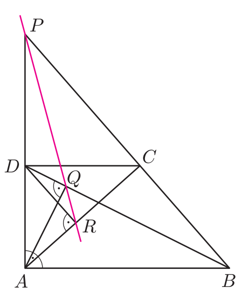
Kolejne doświadczenia pozwolą nam wykreślić tory punktów toczącego się koła. Na tekturze rysujemy koło o promieniu około 4 cm, wycinamy je i na jego promieniu wykonujemy kilka otworków przeznaczonych do włożenia grafitu ołówka (rys. 3). Jeden z otworów powinien być tuż przy brzegu koła, a jeden w jego środku. Na stole kładziemy arkusz papieru, na nim zaś układamy linijkę. Przyklejamy papier i linijkę do stołu za pomocą taśmy klejącej. Do linijki przykładamy koło z tektury i w otwór znajdujący się tuż przy brzegu koła wkładamy grafit ołówka. Obracamy koło palcami, tak żeby toczyło się bez poślizgu po linijce, i dociskamy lekko ołówek do papieru. Co zauważamy na papierze? Powtarzamy to doświadczenie, wkładając grafit ołówka w otwory położone coraz bliżej środka koła oraz w jego środek. Czym różnią się wykreślone na papierze linie?

Otrzymane krzywe to cykloidy (rys. 4). Przedstawiają one w nieruchomym układzie odniesienia tor punktu leżącego na toczącym się kole. Gdy grafit ołówka był tuż przy brzegu koła, otrzymaliśmy cykloidę pełną (linia 4). W pozostałych przypadkach pojawiły się cykloidy skrócone (np. linia 2). Interesujące krzywe możemy uzyskać także w przypadku toczenia przygotowanego wcześniej koła po większym kole, np. o promieniu 10 cm, również wyciętym z tektury (rys. 5). Wówczas w ogólnym przypadku otrzymamy linie nazywane epicykloidami (rys. 6). Spróbujmy jeszcze wyciąć w kwadratowym lub prostokątnym kawałku tektury większy, kołowy otwór i toczyć koło z otworkami po brzegu tego otworu (rys. 7). Wtedy w ogólnym przypadku otrzymamy krzywe nazywane hipocykloidami. Spróbujmy wykreślić hipocykloidy, po których poruszają się różne punkty leżące na promieniu toczącego się wewnątrz otworu koła, i zobaczmy, czym różnią się one od epicykloid. Epicykloidy, nazywane też epicyklami, miały bardzo ważne znaczenie w astronomii przed opisaniem przez Kopernika układu heliocentrycznego, ponieważ służyły do wyjaśniania i przewidywania ruchu planet (dlaczego?). Obecnie epicykloidy i hipocykloidy znajdują zastosowanie m.in. przy projektowaniu kół zębatych.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1294. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b, dla których liczba $a^3 + b^3$ jest czwartą potęgą liczby pierwszej.
Rozwiązanie na str. 19

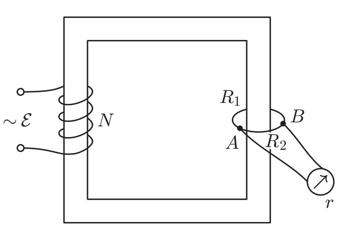


Rys. 1

M 1295. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $\sphericalangle DAB = 90^\circ$ (rys. 1). Proste AD i BC przecinają się w punkcie P. Punkty Q i R są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i D na proste BD i AC. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie na str. 3

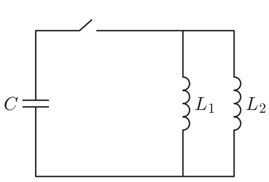
M 1296. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $4k + 3$. Dowieść, że zbioru złożonego z $p - 1$ kolejnych liczb całkowitych nie da się podzielić na dwa podzbiory w taki sposób, aby iloczyn liczb w jednym podzbiorze był równy iloczynowi liczb w drugim podzbiorze.
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 2

F 775. Jedno uzwojenie transformatora obniżającego napięcie ma N zwojów, drugie jeden. Transformator ten podłączony jest do źródła napięcia zmiennego o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$. Do pojedynczego uzwojenia podłączony jest w punktach A i B galwanometr o oporze wewnętrznym r, dzieląc zwój na części o oporze R_1 i R_2 (rys. 2). Jakie natężenie prądu będzie pokazywał galwanometr?
Rozwiązanie na str. 18



Rys. 3

F 776. Kondensator o pojemności C oraz cewki o indukcyjnościach L_1 i L_2 tworzą układ elektryczny jak na rysunku 3. Znaleźć maksymalne natężenie prądu w układzie, przyjmując, że początkowy spadek potencjałów na cewkach był równy U_0.
Rozwiązanie na str. 18