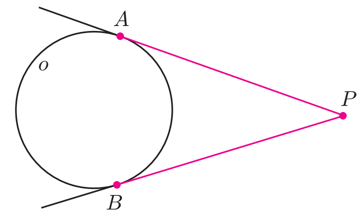
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Kolejny plakat SEM to dwanaście rysunków. Każdy z nich to zadanie, w którym należy udowodnić, że pewne odcinki są równe.

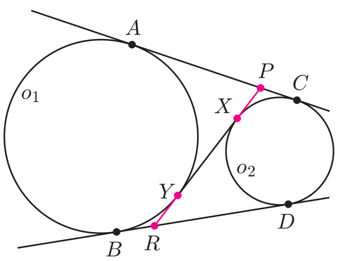
Pierwszy rysunek w pierwszym wierszu ilustruje tak zwane
Najmocniejsze twierdzenie geometrii: $PA = PB$, *gdzie proste* PA *i* PB *to styczne do okręgu* o.



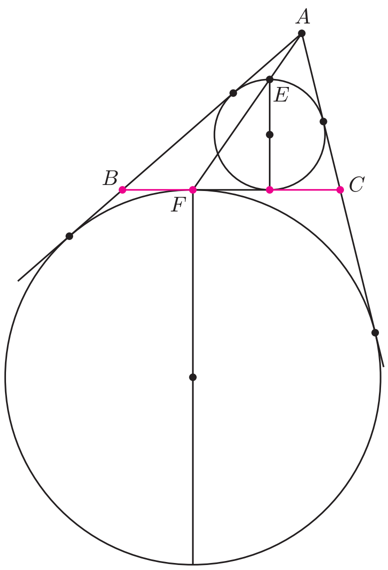
Dowód tego faktu jest prosty, więc nie będziemy go tu przytaczać.

Wprowadźmy oznaczenie: $Po = PA = PB$.

W zadaniu na drugim rysunku mamy udowodnić, że $Po_2 = Ro_1$.



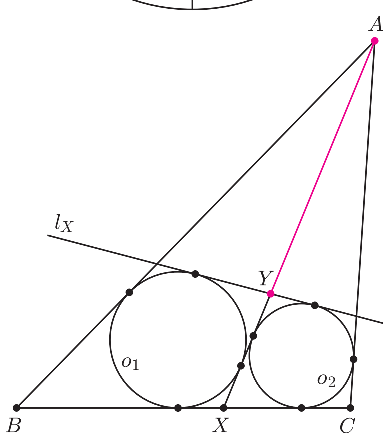
Prostą konsekwencją twierdzenia pierwszego jest równość $AC = BD$,
czyli $Po_1 + Po_2 = Ro_1 + Ro_2$,
czyli $(Po_2 + |XY|) + Po_2 = Ro_1 + (Ro_1 + |XY|)$.
A stąd otrzymujemy tezę.



Spójrzmy teraz na środkowy rysunek w dolnym rzędzie. Dorysujmy okrąg dopisany do trójkąta ABC – tak jak obok. Zauważmy, że jednokładność o środku A, która przekształca mały okrąg na duży, jednocześnie przekształca punkt E na punkt F. Daje to współliniowość punktów A, E, F. Równość, którą mamy tu udowodnić, wynika z poprzedniego zadania.

Rozwiążmy teraz zadanie, którego nie ma na plakacie, ale w jego rozwiązaniu powołamy się na tezę zadania drugiego:

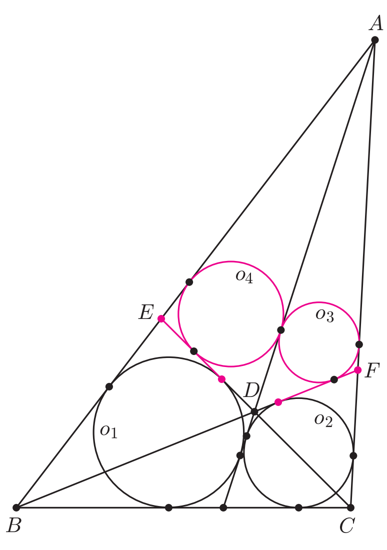
Dany jest trójkąt ABC. *Punkt* X *należy do boku* BC *tego trójkąta. W trójkąty* ABX *i* ACX *wpisane są okręgi* o_1 *i* o_2. *Prosta* l_X, *różna od prostej* BC, *jest styczna zewnętrznie do okręgów* o_1 *i* o_2. *Proste* l_X *i* AX *przecinają się w punkcie* Y. *Wykazać, że długość odcinka* AY *nie zależy od wyboru punktu* X.



Zauważmy, że z zadania drugiego wynika, że $Xo_1 = Yo_2$ oraz $Xo_2 = Yo_1$ (patrz rysunek obok).

Obliczmy sumę $AB + AC - BC$. Po prostych rachunkach otrzymujemy:

$$AB + AC - BC =$$
$$= (Ao_1 + Bo_1) + (Ao_2 + Co_2) - (Bo_1 + Co_2 + Xo_1 + Xo_2) =$$
$$= AY + Yo_1 + AY + Yo_2 - Xo_1 - Xo_2 = 2 \cdot AY.$$



Przed omówieniem kolejnego rysunku z plakatu polecamy Czytelnikowi następujące zadanie: *Wykazać, że w czworokąt wypukły* $AEDF$ *można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty* AED *i* AFD *są styczne.*

W zadaniu na trzecim plakatowym rysunku mamy udowodnić, że (patrz rysunek obok) $Eo_1 = Fo_2$.

Skorzystamy z tego, że istnienie okręgu wpisanego w czworokąt wklęsły $ABCD$ jest równoważne temu, że $AB + CD = BC + DA$. Analogicznie dla czworokąta wklęsłego $ACBD$ otrzymujemy równość $AC + BD = BC + DA$. Z tych dwóch równości wynika, że $AB + CD = AC + BD$. To zaś jest równoważne temu, że istnieje okrąg wpisany w czworokąt wklęsły $ABDC$. Ten okrąg jest jednocześnie wpisany w czworokąt wypukły $AEDF$. Wobec tego okręgi o_3 i o_4 są styczne.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $Eo_1 = Do_4 = Do_3 = Fo_2$.

Joanna BEDNARCZUK i Jerzy BEDNARCZUK