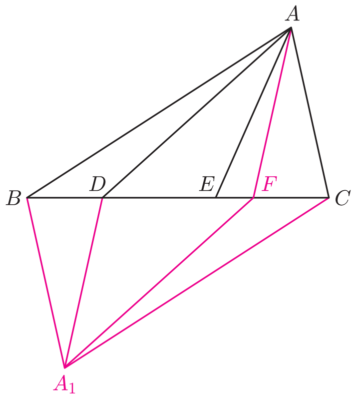
Chodzi mi o to, aby język giętki powiedział wszystko, co pomyśli głowa



Rys. 1

Na stronie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej w *Delcie* 7/2010 omówione były najtrudniejsze dwa zadania finału XLI Olimpiady Matematycznej. Spójrzmy teraz na bodaj najłatwiejsze zadanie tego bardzo trudnego finału – rozwiązało je 39 finalistów, z tego 29 bezbłędnie.

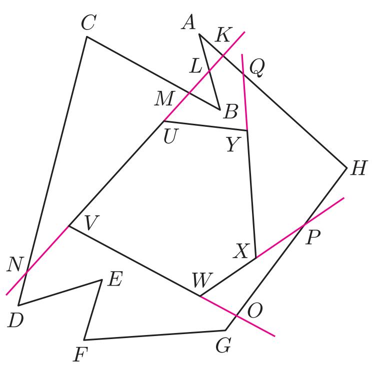
Zadanie 4. *Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E, przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają obwody trójkątów ABC i ADE. Udowodnić, że $p_1 > p_2 + 2 \cdot \min(BD, EC)$.*

Rozwiązanie. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $BD \leqslant EC$. Niech F będzie takim punktem odcinka EC, że $BD = FC$. Oczywiście, $\min(BD, EC) = BD = \min(BD, FC)$. Obwód trójkąta ADF nie jest mniejszy od obwodu trójkąta ADE (równy tylko, gdy $F = E$, tzn. $BD = EC$), bo $AF + FE \geqslant AE$. Wystarczy więc dowieść, że

$$AB + BC + CA > AD + DF + FA + 2BD = AD + BC + FA,$$

czyli $AB + CA > AD + FA$. Niech A_1 będzie punktem symetrycznym do A względem środka odcinka BC. Figury ABA_1C i ADA_1F są równoległobokami, przy czym pierwszy zawiera drugi, więc obwód pierwszego, czyli $2AB + 2AC$, jest większy od obwodu drugiego, tj. od $2AD + 2AF$.

To wyróżnione zdanie bardzo speszyło wielu zawodników: bo niby z czego to wynika? Przyjrzyjmy się czemuś ogólniejszemu – *jeśli wielokąt wypukły w zawarty jest wewnątrz wielokąta v* (już niekoniecznie wypukłego), *to obwód w jest mniejszy od obwodu v*. Prawda, ale jak to uzasadnić? Właściwie od razu widać, że argumenty decydujące są dwa: *łamana łącząca końce odcinka jest od niego dłuższa* i *wielokąt wypukły jest przecięciem półpłaszczyzn o brzegach zawierających jego boki.*

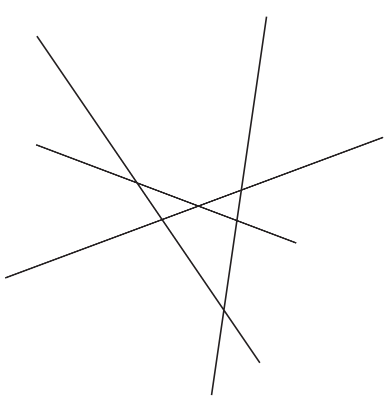


Rys. 2

Posługując się tymi argumentami, z łatwością stwierdzamy, że obwód wielokąta $w = UVWXY$ z rysunku 2 jest mniejszy od obwodu wielokąta $v = ABCDEFGH$ nie tylko dlatego, że to widać na oko. Odetnijmy od v wszystko, co nie leży w tej półpłaszczyźnie zawierającej w, której brzegiem jest prosta UV – zostanie wielokąt $KLBMNDEFGH$, który ma obwód mniejszy od v, bo łamana KAL jest dłuższa od KL, a MCN dłuższa od MN. Tnijmy dalej: teraz odrzucamy to, co nie leży w tej półpłaszczyźnie zawierającej v, której brzegiem jest prosta VW – zostanie $KLBMVOH$ i tnijmy dalej… Będziemy otrzymywali w ten sposób ciąg wielokątów o coraz mniejszych obwodach, ale ciągle zawierających w: $v = ABCDEFGH$, $KLBMNDEFGH$, $KLBMVOH$, $KLBMVWPH$, $KLBMVWXQ$, $UVWXY = w$.

No dobrze, to był przykład, ale jak to zapisać ogólnie? I tak okazuje się, że największa trudność leży w umiejętności zapisania – nawet prostej, w gruncie rzeczy – myśli.

Czy umiesz to sobie wyobrazić? A czy umiesz dowieść, że tak jest?



Cztery proste leżą na płaszczyźnie w ten sposób, że każde trzy z nich wyznaczają trójkąt – tak jak na rysunku obok.

Czy potrafisz ujrzeć oczyma wyobraźni parabolę styczną do każdej z tych prostych? A czy umiesz udowodnić, że dla każdych czterech takich prostych istnieje dokładnie jedna taka parabola?

SPRÓBUJ!

A może potrafisz wyobrazić sobie okręgi opisane na każdym z czterech trójkątów wyznaczonych przez te proste i widzisz, że mają one wspólny punkt? Jak tego dowieść?

SPRÓBUJ!

A teraz wyobraź sobie równocześnie jedno i drugie. Zapewne przyszło Ci do głowy, że wspólny punkt tych czterech okręgów to ognisko tej paraboli.

UDOWODNIJ TO!

Warto pamiętać, iż ognisko paraboli to taki punkt, że promienie światła, wychodzące z niego, po odbiciu od tej paraboli wszystkie mają jeden kierunek – są równoległe (a więc – wbrew zapowiedzi – znalazła się tu i fizyka).

M. K.