O wieżach, permanencie i parzystości

Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ zakryto część pól i zapytano nas, na ile sposobów można ustawić na niej n wież tak, by żadna z wież nie stała na zakrytym polu i nie groziła innej (tzn. w każdym wierszu i w każdej kolumnie musi stać dokładnie jedna wieża).

Jeśli przedstawimy szachownicę jako zero-jedynkową macierz $A = (a_{i,j})$ wymiaru $n \times n$, w której $a_{i,j} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy pole leżące na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny jest zakryte, to nietrudno będzie się przekonać, że odpowiedzią jest wartość wyrażenia

$$\sum_{\pi} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{n,\pi(n)},$$

w którym sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje π zbioru $\{1, \ldots, n\}$. To wyrażenie fachowo nazywa się *permanentem* macierzy A i jego wyznaczenie jest problemem na tyle trudnym obliczeniowo, że nie znamy żadnego algorytmu, który robiłby to szybciej niż w czasie wykładniczym.

Dostaliśmy jednak szansę na rehabilitację, gdyż postawiono drugie pytanie: czy liczba poprawnych ustawień wież jest parzysta? Okazuje się, że w istocie takie pytanie jest prostsze.

Definicja permanentu może wydać się znajoma tym, którzy znają permutacyjną definicję wyznacznika macierzy. W istocie, wygląda ona bardzo podobnie:

$$\det(A) := \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \ldots a_{n,\pi(n)},$$

gdzie funkcja $\operatorname{sgn}(\pi)$ jest tzw. znakiem permutacji; dla nas będzie istotne, że przyjmuje ona wartości ± 1. Kluczową obserwacją jest, że $-1 \equiv 1 \pmod 2$, zatem wyznacznik i permanent tej samej całkowitoliczbowej macierzy są zawsze tej samej parzystości!

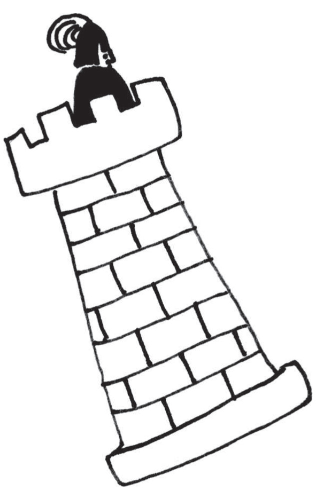
To pozwala nam sprowadzić problem do obliczenia wartości wyznacznika modulo 2, co możemy zrobić chociażby w czasie $O(n^3)$, korzystając z metody eliminacji Gaussa.

Tomasz IDZIASZEK

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1291. W pola szachownicy $m \times n$, gdzie m i n są większe od 1, wpisano liczby $1, 2, \ldots, mn$. Pola, w których znajdują się liczby i oraz $i + 1$, mają wspólny bok dla każdego i. Wykazać, że istnieje liczba k oraz dwa pola mające wspólny bok, w których znajdują się liczby k oraz $k + 3$.
Rozwiązanie na str. 2



M 1292. Wykazać, że istnieje zbiór złożony ze 100 różnych liczb całkowitych dodatnich o tej własności, że suma dowolnych elementów tego zbioru nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym lub równym 2.
Rozwiązanie na str. 3

M 1293. Dany jest staw w kształcie koła oraz trzy ustalone proste k, l, m. Z punktu A znajdującego się na brzegu stawu wypływa ryba i płynie w kierunku równoległym do prostej k. Po dotarciu do brzegu ryba zakręca i płynie dalej w kierunku wyznaczonym przez prostą l. Po ponownym dotarciu do brzegu stawu ryba kontynuuje swoją podróż w analogiczny sposób, obierając kolejno kierunki m, k, l oraz m. Wykazać, że po zakończeniu tej wędrówki ryba znajduje się w wyjściowym punkcie A.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 773. Okrągły, płaski lep na muchy zbliża się z prędkością $\mathbf{v}$, skierowaną wzdłuż prostopadłej do płaszczyzny lepu, do roju much poruszającego się z prędkością $\mathbf{u}$, prostopadłą do $\mathbf{v}$. Muchy lecą w obszarze ograniczonym dwiema płaszczyznami prostopadłymi do kierunku ruchu lepu, płaszczyzny te są odległe o d. W jednostce objętości znajduje się n much, promień lepu wynosi R. Ile much złapie lep?
Rozwiązanie na str. 24

F 774. Bombka choinkowa tłucze się przy zderzeniu z podłogą po upadku z wysokości równej co najmniej h. Z jaką minimalną prędkością musi się poruszać taka bombka, żeby po zderzeniu z taką samą, spoczywającą, obie się rozbiły? Zakładamy, że druga bombka jest zawieszona w powietrzu, prędkość zaś pierwszej bombki skierowana jest wzdłuż prostej łączącej środki bombek.
Rozwiązanie na str. 8