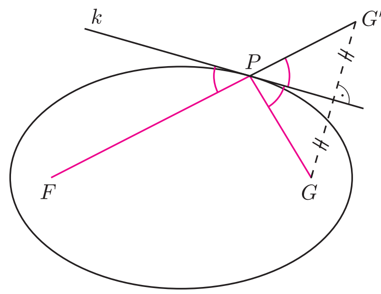
O robaku i elipsach

Joanna JASZUŃSKA

Na ziemi leży podłużny, cienki robak (powyginany odcinek) o długości 1. Niezależnie od sposobu jego ułożenia można go, oczywiście, w całości przykryć kołem o środku w końcu robaka i o promieniu 1. Można też sprytniej – kołem o środku w środku długości robaka i o promieniu $\frac{1}{2}$. Pokażemy więcej: do przykrycia robaka wystarczy półkole o promieniu $\frac{1}{2}$. W dowodzie wykorzystamy elipsy.

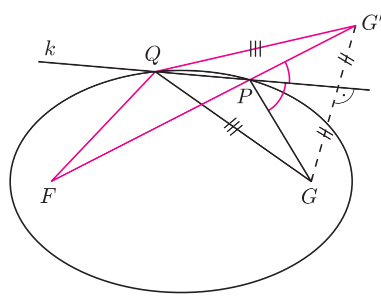
Elipsa o ogniskach w punktach F, G i o stałej $2a > FG$ to zbiór takich punktów P płaszczyzny, że $PF + PG = 2a$ (rys. 1). Można ją narysować, mocując końce sznurka o długości $2a$ w ogniskach i naciągając ten sznurek ołówkiem.



Rys. 1. Na stole bilardowym w kształcie elipsy kula tocząca się z jednego ogniska po odbiciu od brzegu zawsze trafia w drugie ognisko.

Fakt 1. *Styczną w punkcie P do elipsy o ogniskach F, G jest dwusieczna k kąta zewnętrznego w trójkącie PFG (rys. 1). Jeśli punkt G' jest obrazem G w symetrii względem k, to punkty F, P, G' leżą na jednej prostej i $FG' = 2a$.*

Dowód. Załóżmy, że dwusieczna k przecina elipsę w drugim punkcie Q, różnym od P (rys. 2). Z symetrii mamy $QG = QG'$, a więc $QF + QG' = QF + QG = 2a$.



Rys. 2

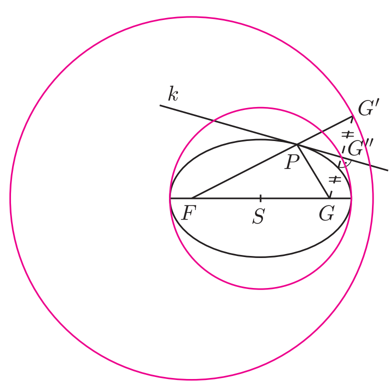
Punkt G' trafia na prostą FP, bo oś symetrii k jest dwusieczną. Stąd $FG' = PF + PG' = PF + PG = 2a$. W trójkącie QFG' mamy więc $QF + QG' = FG'$, co jest sprzeczne z nierównością trójkąta. □

Fakt 2. *Zbiór obrazów G' ogniska G elipsy, w symetriach względem prostych stycznych do tej elipsy, to okrąg o środku F i promieniu $2a$ (rys. 3).*

Dowód. Na mocy faktu 1 wszystkie obrazy G' spełniają warunek $FG' = 2a$ (rys. 1), zatem leżą na takim okręgu.

Dla dowolnego punktu G' z tego okręgu odcinek FG' przecina elipsę w pewnym punkcie P. Z faktu 1 styczną do elipsy w tym punkcie jest dwusieczna k kąta GPG'. Ponieważ $FP + PG' = 2a = FP + PG$, czyli $PG' = PG$, więc G' jest obrazem G w symetrii względem k. Stąd zbiorem obrazów G' jest cały okrąg $\mathcal{O}(F, 2a)$. □

Fakt 3. *Zbiór rzutów prostokątnych ogniska G elipsy na proste styczne do tej elipsy to okrąg opisany na elipsie (rys. 3).*

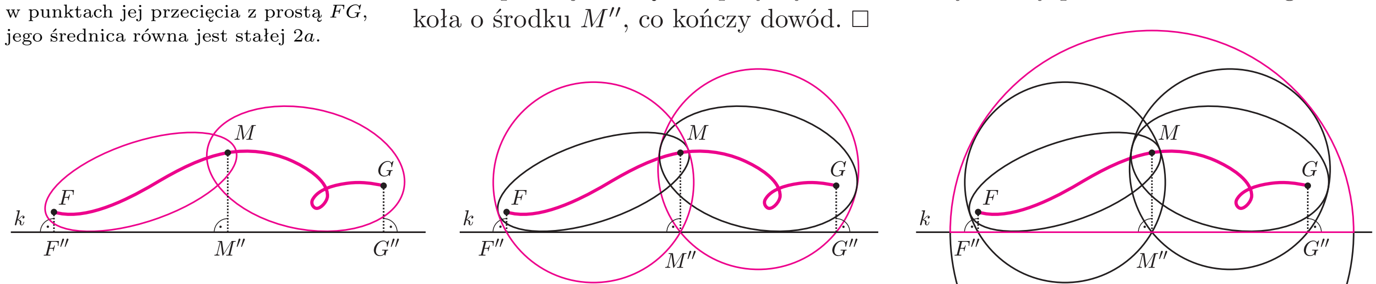


Rys. 3. Rzuty ogniska F dają ten sam okrąg opisany. Jest on styczny do elipsy w punktach jej przecięcia z prostą FG, jego średnica równa jest stałej $2a$.

Dowód. Jednokładność o środku G i skali $\frac{1}{2}$ przekształca punkt G' – obraz G w symetrii względem stycznej na punkt G'' – rzut G na tę styczną. Z faktu 2 wiemy, że zbiorem obrazów symetrycznych jest okrąg $\mathcal{O}(F, 2a)$, stąd zbiorem rzutów jest okrąg $\mathcal{J}_G^{1/2}(\mathcal{O}(F, 2a)) = \mathcal{O}(S, a)$, gdzie S jest środkiem odcinka FG (rys. 3). □

Przykrycie robaka. Oznaczmy przez F, G końce robaka i przez M jego środek. Połówkę robaka od F do M można otoczyć elipsą $\mathcal{E}_F$ o ogniskach F, M i stałej $\frac{1}{2}$, połówkę od G do M – analogiczną elipsą $\mathcal{E}_G$ (rys. 4(a)).

Niech F'', G'', M'' będą rzutami punktów F, G, M na prostą k, styczną do obu elips. Na mocy faktu 3 punkty F'', M'' leżą na okręgu opisanym na elipsie $\mathcal{E}_F$, a punkty G'', M'' na okręgu opisanym na elipsie $\mathcal{E}_G$ (rys. 4(b)). Średnica każdego z tych okręgów jest równa $\frac{1}{2}$. Rozważmy koło o środku M'' i promieniu $\frac{1}{2}$ (rys. 4(c)). Zawiera ono obydwa okręgi opisane na elipsach, czyli też obie elipsy, zatem także całego robaka. Jednocześnie elipsy, więc też robak, leżą po jednej stronie prostej k. Stąd do przykrycia robaka wystarczy połówka rozważanego koła o środku M'', co kończy dowód. □



Rys. 4 (a)–(c). Kolejne etapy przykrywania robaka.

Pole naszego półkola to $\pi/8 \simeq 0{,}39$. Nie wiadomo, jakie pole P ma najmniejsza figura, którą można przykryć dowolnego robaka. Na pewno $P < 0{,}260437$. Zagadnienie to znane jest, od nazwiska autora, jako *Leo Moser's Worm Problem.*