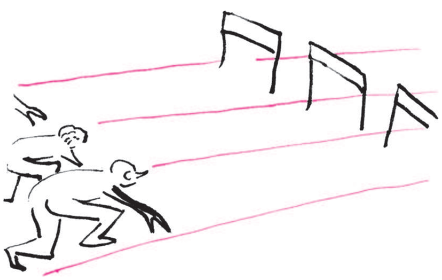
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 595 ($WT = 2{,}58$) i 596 ($WT = 1{,}38$) z numeru 2/2010

Marek Prauza	Poraj	45,14
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	42,35
Marek Spychała	Warszawa	41,22
Piotr Kumor	Olsztyn	40,19

Marek Prauza przekracza „44" już po raz czwarty.



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Zadania z matematyki nr 607, 608

Redaguje Marcin E. KUCZMA

607. Niech X będzie zbiorem n-elementowym ($n > 3$). Wyznaczyć największą liczbę m, dla której w zbiorze X istnieje m podzbiorów, z których żaden nie zawiera się w innym oraz żaden nie jest równoliczny z innym.

608. Znaleźć wszystkie funkcje określone na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające nierówność

$$f(x) - f(y) \geqslant f(xy)(y - x) \qquad \text{dla } x, y > 0.$$

Zadanie 608 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Rybnika.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2010

Przypominamy treść zadań:

603. Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n \times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie (tj. mające wspólny bok z polem, na którym ten pionek stał). Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Okazało się ponadto, że każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, że był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym. Czy mogło się zdarzyć, że był dokładnie jeden taki moment?

604. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$, spełniające układ równań

$$x_1 + \ldots + x_n = n, \qquad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = n^2$$

oraz nierówności $x_i \leqslant 2$ dla $i = 1, \ldots, n$.

603. Niech **p** będzie tym pionkiem, który najpóźniej opuścił swoje „domowe" pole P i niech **q** będzie tym pionkiem, który najwcześniej powrócił na swoje pole Q. Jest jasne, że start pionka **p** musiał poprzedzić powrót pionka **q**, skoro ten ostatni mógł odwiedzić pole P.

W trakcie swojej wędrówki pionek **p** wszedł na pole Q i zszedł z tego pola; zaś pionek **q** wszedł na pole P i zszedł z tego pola. Te cztery ruchy musiały mieć miejsce pomiędzy startem **p** z pola P i powrotem **q** na pole Q. Przez ten czas wszystkie pozostałe pionki były w podróży, skoro każdy z nich wyruszył w drogę wcześniej niż **p**, a powrócił później niż **q** (każdy z nich wykonał n^2 ruchów – ten warunek gwarantuje, że w trakcie wędrówki nie wpadł na chwilę do domu).

Tak więc czas, przez który wszystkie pionki były w drodze, trwał co najmniej cztery sekundy. Były zatem co najmniej *trzy* momenty (rozdzielające ruchy), w których żaden pionek nie stał na swoim polu.

[A czy musiały być *cztery* takie momenty – czyli czy od chwili startu pionka **p** do chwili powrotu pionka **q** musiało upłynąć co najmniej pięć sekund? Zostawiamy Czytelnika z tym nietrudnym pytaniem.]

604. Niech $(x_1, \ldots, x_n)$ będzie rozwiązaniem tego układu równań i nierówności. Liczby nieujemne $y_i = 2 - x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) spełniają równania

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (2 - x_i) = 2n - n = n$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (4 - 4x_i + x_i^2) = 4n - 4n + n^2 = n^2.$$

A ponieważ

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i<j} y_i y_j,$$

z uzyskanych zależności wynika, że

$$\sum_{i<j} y_i y_j = 0.$$

To oznacza, że liczby $y_1, \ldots, y_n$ są wszystkie z wyjątkiem jednej równe zeru; zaś ta jedna jest równa n (skoro $\sum y_i = n$). Równoważnie: liczby $x_1, \ldots, x_n$ są wszystkie z wyjątkiem jednej równe 2; zaś ta jedna jest równa $2 - n$. Nietrudno sprawdzić, że każdy taki układ $(x_1, \ldots, x_n)$ spełnia oba zadane równania.

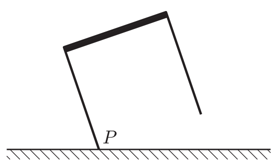
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 496 ($WT = 1{,}00$) i 497 ($WT = 3{,}28$) z numeru 4/2010

Michał Koźlik	Gliwice	43,69
Marian Łupieżowiec	Gliwice	36,55
Jacek Piotrowski	Rzeszów	34,15
Tomasz Rudny	Warszawa	31,68
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,57
Jerzy Witkowski	Radlin	30,54
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57

Pan Wilk uaktywnił się po 18-letniej przerwie! Proszę się nie niepokoić, niczyje stare konto w Klubie nie zaginie (no, chyba że powódź, pożar czy inna katastrofa – odpukać!).



Zadania z fizyki nr 504, 505

Redaguje Jerzy B. BROJAN

504. Lokomotywa jadąca po prostym torze ze stałą prędkością 180 km/h gwiżdże, wydając ton o częstotliwości 1000 Hz. W odległości 300 m od toru stoi krowa. Ile wyniesie częstotliwość tonu słyszanego przez krowę w momencie, gdy lokomotywa zbliży się do niej na odległość 500 m? Prędkość dźwięku w powietrzu ma wartość 340 m/s.

505. Profesor wykonał przyrząd zawierający kołową pętlę o promieniu 10 cm, która miała być naładowana dużym ładunkiem. Studentowi zlecił zadanie:

– Oblicz no, kochaneńki, siłę rozciągającą ten drut. Przewiduję ładunek około 10 μC.

Student raźno zabrał się do pracy, ale po kwadransie podniósł głowę i powiedział zmieszany:

– Panie Profesorze, tego zadania... nie da się rozwiązać.

– Bzdura! – brzmiała odpowiedź. – Widzisz tę pętlę? Czy nie można jej naładować? Przecież będzie ona rozciągana wskutek odpychania się ładunków, czyż nie? Nie widzę powodu, dla którego nie można by wyznaczyć tej siły!

– Czy nie brakuje jakiejś danej? – zapytał Student niepewnie.

– A czegóż może brakować? – zdenerwował się Profesor. – Rób, co chcesz, ale masz mi wyliczyć tę siłę! Jeśli mi tego nie rozwiążesz, to poszukaj sobie innego promotora!

Czytelnicy *Delty*, pomóżcie Studentowi!

Rozwiązania zadań z numeru 6/2010

Przypominamy treść zadań:

500. Naderer i Fedal grają w tenisa, a za ich plecami kibice mierzą odstępy czasu między uderzeniami, posługując się mikrofonami podłączonymi do zegarów elektronicznych. Kibic Naderera twierdzi, że czas lotu piłki po uderzeniu Fedala jest o 20% krótszy od lotu po uderzeniu Naderera, natomiast kibic Fedala – że po uderzeniu Naderera czas lotu piłki jest o 15% krótszy. Ile wynosi prędkość piłki po uderzeniu jednego i drugiego gracza?

501. Obrys taboretu jest sześcianem o boku 60 cm, blat jest jednorodnym kwadratem, łączna masa nóg jest równa masie blatu, a współczynnik tarcia o podłogę wynosi $f = 0{,}4$. Odchylono taboret na dwóch nogach od pionu prawie do punktu równowagi nietrwałej i puszczono, po czym opadł do normalnej pozycji. Reakcja podłogi w pionie jest niesprężysta. Czy nastąpi oderwanie się od podłogi tych nóg, które dotychczas jej dotykały? O ile przesunął się taboret po opadnięciu?

500. Oznaczmy szukane prędkości jako v_N i v_F, prędkość dźwięku jako v_d, a odległość między graczami jako s. Czas lotu piłki Fedala wynosi s/v_F, a czas przejścia sygnału dźwiękowego na tej samej drodze jest równy s/v_d, więc stoper kibica Naderera zarejestruje odstęp między uderzeniami równy $s/v_F - s/v_d$, natomiast przy locie piłki w stronę przeciwną – odstęp $s/v_N + s/v_d$. Zatem

$$\frac{1}{v_F} - \frac{1}{v_d} = 0{,}8\left(\frac{1}{v_N} + \frac{1}{v_d}\right).$$

Z pomiarów kibica Fedala wynika równanie

$$\frac{1}{v_N} - \frac{1}{v_d} = 0{,}85\left(\frac{1}{v_F} + \frac{1}{v_d}\right).$$

Stąd wynika $v_N = 0{,}0947 v_d$, $v_F = 0{,}0976 v_d$, a po podstawieniu $v_d = 340$ m/s otrzymujemy $v_N = 32{,}2$ m/s, $v_F = 33{,}2$ m/s. (Oczywistym uproszczeniem jest uznanie ruchu piłki za jednostajny i prostoliniowy.)

501. Środek masy taboretu S leży w odległości $\frac{1}{4}a$ od blatu (gdzie a – długość nóg i boku blatu) i jest odległy od punktu podparcia P o $l = \frac{\sqrt{13}}{4}a$, natomiast moment bezwładności okazuje się równy $I_c = \frac{13}{48}ma^2$ względem środka masy oraz $I = \frac{13}{12}ma^2$ względem punktu podparcia (m – masa całego taboretu). Prędkość kątową taboretu ω tuż przed uderzeniem o podłogę znajdujemy z zasady zachowania energii:

$$mgl(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

gdzie β jest kątem między nogą a odcinkiem SP, równym $\mathrm{arctg}(2/3) = 33{,}7^\circ$. Otrzymujemy $\omega = 0{,}529\sqrt{g/a}$.

Zbadamy teraz uderzenie o podłogę – ponieważ trwa ono bardzo krótko, więc siłę ciężkości możemy zaniedbać. Na taboret działa w punkcie uderzenia pionowa siła reakcji podłoża o popędzie Δp_y oraz pozioma siła tarcia, której popęd Δp_x jest równy $f \cdot \Delta p_y$. W efekcie działania obu sił prędkość kątowa osiągnie wartość ω_1, a pionowa składowa prędkości środka masy – wartość v_{y1} (ze zwrotem do góry), przy czym brak odbicia uderzających o podłogę nóg (niesprężystość) narzuca związek $\omega_1 l \sin\beta = v_{y1}$. Tuż przed uderzeniem pionowa składowa prędkości środka masy wynosiła $v_y = \omega l \sin\beta$ (ze zwrotem do dołu), zatem

$$\Delta p_y = m(v_y + v_{y1}) = ml\sin\beta(\omega + \omega_1).$$

Momenty sił względem środka masy są równe $\Delta p_x \cdot 3a/4$ (ze zwrotem zwiększającym moment pędu) oraz $\Delta p_y \cdot a/2$ (ze zwrotem przeciwnym), a więc

$$I_c\Delta\omega = I_c(\omega_1 - \omega) = \frac{a}{4}(3\Delta p_x - 2\Delta p_y) =$$

$$= \frac{a}{4}ml\sin\beta(\omega + \omega_1)(3f - 2).$$

Po podstawieniu danych znajdujemy $\omega_1 = 0{,}461\omega$. Dodatnia wartość ω_1 oznacza, że odpowiedź na pierwsze pytanie jest pozytywna. Dalej najważniejsza jest wielkość Δp_x, która wychodzi równa $0{,}292 m\omega a$, czyli pozioma składowa prędkości środka masy ulega zmniejszeniu od wartości $v_x = 0{,}75\omega a$ tuż przed uderzeniem do $v_{x1} = 0{,}458\omega a$ tuż po nim.

Pozostało nam obliczenie przesunięcia s taboretu po uderzeniu. Gdyby nacisk taboretu na podłogę był stale równy ciężarowi, wynikiem byłoby

$$s_1 = \frac{v_{x1}^2}{2fg} = 0{,}073a = 4{,}4 \text{ cm}.$$

Wartość ta jest zaniżona, ponieważ odbicie taboretu w górę zmniejsza nacisk i siłę tarcia. Alternatywną metodą rozwiązania byłoby podstawienie do powyższego wzoru takiej prędkości v_{x2}, którą środek masy taboretu osiąga w trakcie odbicia, w momencie zatrzymania ruchu wzdłuż osi pionowej. Odtąd aż do zatrzymania taboretu jego średni nacisk na podłogę jest równy ciężarowi – jednakże jeśli początkowo (w końcowej fazie odbicia) jest on większy, a potem mniejszy, to zastąpienie zmiennej siły tarcia przez średnią spowoduje zawyżenie rezultatu. Obliczamy to górne ograniczenie analogicznie do powyższego:

$$s_2 = 0{,}106a = 6{,}3 \text{ cm}.$$

Ostatecznie $s = 5{,}4 \pm 1{,}0$ cm.