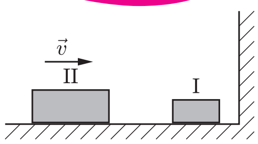
mała delta



Jak wyznaczyć liczbę π za pomocą zderzeń?

Rozpatrzmy dwa ciała położone na powierzchni ograniczonej z prawej strony ścianą (rysunek). Pierwsze ciało o masie 1 początkowo spoczywa, a drugie ciało o masie k^2 razy większej porusza się w prawo z pewną prędkością v. Tarcie pomijamy. W którymś momencie ciała zderzają się, po czym pierwsze ciało zaczyna poruszać się w kierunku ściany, odbija się od niej, znów uderza w drugie ciało, zderza się ze ścianą i tak dalej. Ciała będą zderzać się w ten sposób do chwili, gdy drugie ciało zacznie uciekać w lewo szybciej niż pierwsze. Ile będzie wszystkich stuknięć ciało-ciało i ciało-ściana w zależności od stosunku mas k^2?

Czytelnik może wykonać symulację na komputerze albo sprawdzić to doświadczalnie (jeśli ma dostatecznie gładki stół i dużo cierpliwości...). Dla $k = 10^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, pierwszych kilka wyników wygląda następująco:

k^2	liczba zderzeń
1	3
100	31
10000	313
1000000	3141

Czytelnik domyśla się na pewno dalszego ciągu – dla $k^2 = 100000000$ otrzymamy pewnie 31415 itd. Istotnie tak jest! Czyżbyśmy znaleźli nową metodę doświadczalnego wyznaczania liczby π?

Przyjrzyjmy się sytuacji nieco dokładniej. Niech v_{2n} oznacza prędkość drugiego ciała po n-tym zderzeniu z pierwszym ciałem i analogicznie u_{2n} – prędkość pierwszego ciała po n-tym zderzeniu (dodatnia wartość prędkości oznacza, że ciało oddala się od ściany). Przy odbiciu od ściany pierwsze ciało zmienia prędkość na $u_{2n+1} = -u_{2n}$, a prędkość drugiego ciała, oczywiście, się nie zmienia, $v_{2n+1} = v_{2n}$. Początkowo mamy $u_1 = 0$, $v_1 = -v$. Niech całkowita energia kinetyczna ciał wynosi E_{kin} – energia jest zachowana, więc w każdej chwili $\frac{1}{2}k^2 v_n^2 + \frac{1}{2}u_n^2 = E_{\text{kin}}$. Wprowadzając przeskalowane zmienne $V_n = \sqrt{\frac{k^2}{2E_{\text{kin}}}}v_n$, $U_n = \sqrt{\frac{1}{2E_{\text{kin}}}}u_n$, widzimy, że $V_n^2 + U_n^2 = 1$, a więc możliwe prędkości ciał leżą na okręgu jednostkowym płaszczyzny (U, V).

Jak powiązać prędkości ciał przed i po ich zderzeniu? Początkowo $U_1 = 0$, $V_1 = -1$. Z zasady zachowania pędu wynika:

$$kV_{2n} + U_{2n} = kV_{2n-1} + U_{2n-1}. \tag{1}$$

Z kolei z zasady zachowania energii mamy:

$$V_{2n}^2 + U_{2n}^2 = V_{2n-1}^2 + U_{2n-1}^2. \tag{2}$$

Z pierwszego równania $V_{2n} - V_{2n-1} = \frac{1}{k}(U_{2n-1} - U_{2n})$, z drugiego zaś $(V_{2n} - V_{2n-1})(V_{2n} + V_{2n-1}) = (U_{2n-1} - U_{2n})(U_{2n-1} + U_{2n})$, co po podstawieniu i prostych rachunkach daje:

$$U_{2n} = \frac{2k}{k^2+1}V_{2n-1} - \frac{k^2-1}{k^2+1}U_{2n-1}, \tag{3}$$

$$V_{2n} = \frac{k^2-1}{k^2+1}V_{2n-1} + \frac{2k}{k^2+1}U_{2n-1}. \tag{4}$$

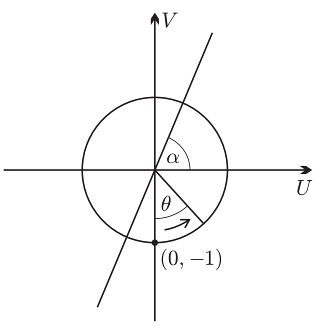
Po uwzględnieniu związku $V_{2n+1} = V_{2n}$ i $U_{2n+1} = -U_{2n}$ otrzymujemy:

$$U_{2n+1} = -\frac{2k}{k^2+1}V_{2n-1} + \frac{k^2-1}{k^2+1}U_{2n-1}, \tag{5}$$

$$V_{2n+1} = \frac{k^2-1}{k^2+1}V_{2n-1} + \frac{2k}{k^2+1}U_{2n-1}. \tag{6}$$

Aby wyznaczyć liczbę wszystkich zderzeń ciał, trzeba znaleźć takie największe N (w zależności od k, czyli N_k), że $u_{2N_k-1} > v_{2N_k-1}$, ale $u_{2N_k+1} \leqslant v_{2N_k+1}$ (jeśli po N_k-tym zderzeniu i odbiciu się od ściany pierwsze ciało będzie miało mniejszą prędkość niż drugie, to nigdy już go nie dogoni). Liczba wszystkich zderzeń ciało-ciało i ciało-ściana będzie równa $2N_k$, z wyjątkiem sytuacji $u_{2N_k+1} = 0$, kiedy ostatnim zderzeniem byłoby zderzenie ciało-ciało i wszystkich zderzeń byłoby $2N_k + 1$. Jak obliczyć N_k?

Można spróbować zamienić rekurencję na jawny wzór na u_{2n} i v_{2n} – ambitnego Czytelnika zachęcamy do prób. Istnieje jednak prostsza metoda znalezienia warunku na N_k, niewymagająca rozwiązywania układu równań rekurencyjnych.



Popatrzmy na współczynniki w równaniach (5) i (6) – ponieważ $\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2 = 1$, możemy dla pewnego kąta θ położyć $\cos\theta = \frac{k^2-1}{k^2+1}$, $\sin\theta = \frac{2k}{k^2+1}$. Widać więc geometryczną interpretację zderzeń – po zderzeniu ciało-ciało i ciało-ściana punkt (U_{2n}, V_{2n}), reprezentujący prędkości obu ciał, podlega na okręgu obrotowi o kąt θ! Stąd po n takich odbiciach punkt początkowy $(0, -1)$ zostanie obrócony o kąt $n\theta$.

Co geometrycznie oznacza warunek $u_{2n} > v_{2n}$? W naszych współrzędnych oznacza to, że $U_{2n} > \frac{1}{k}V_{2n}$, a więc że punkt (U_{2n}, V_{2n}) leży poniżej prostej o kącie nachylenia α, gdzie $\operatorname{tg}\alpha = k$. A więc szukane N_k to takie, dla którego jeszcze $-\frac{\pi}{2} + N_k\theta < \alpha$, ale już $-\frac{\pi}{2} + (N_k+1)\theta \geqslant \alpha$ (pamiętajmy, że zaczynamy z punktu $(0, -1)$ o kącie $-\frac{\pi}{2}$).

Chcemy przekonać się, czy faktycznie $\frac{2N_k+1}{k}$ zbiega do π, gdy $k \to \infty$ (granica $\frac{2N_k}{k}$ będzie taka sama). Wystarczy wykazać, że $\frac{N_k}{k}$ zbiega do $\frac{\pi}{2}$. W tym celu przepiszmy powyższe nierówności jako

$$\alpha - \theta \leqslant -\frac{\pi}{2} + N_k\theta < \alpha, \tag{7}$$

co po podzieleniu stronami przez $k\theta$ i uporządkowaniu daje

$$\frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{k\theta} - \frac{1}{k} \leqslant \frac{N_k}{k} < \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{k\theta}. \tag{8}$$

Mamy $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\sin\theta = \frac{2k}{k^2+1}$, zatem $\alpha = \operatorname{arctg} k$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{2k}{k^2-1}$. Widzimy od razu, że przy $k \to \infty$ kąt α zbiega do $\frac{\pi}{2}$. Obliczenie granicy $k\theta = k \operatorname{arctg}\frac{2k}{k^2-1}$ wymaga odrobinę więcej rachunków (można wykorzystać $\operatorname{tg} r/r \approx 1$ dla r bardzo bliskich zeru), ale nie jest trudne i daje w wyniku $k\theta \to 2$.

Podstawmy to do nierówności (8): $\frac{1}{k} \to 0$ przy $k \to \infty$, zatem granica lewej i prawej strony wynosi $\frac{\pi}{2}$. Stąd wynika, że faktycznie $\frac{N_k}{k} \to \frac{\pi}{2}$, czyli łączna liczba zderzeń ciał oraz ciała ze ścianą po podzieleniu przez k zbiega do π!

Czytelnik może zastanowić się, jakie jest tempo zbieżności, a więc dlaczego zwiększając stosunek mas ciał 100 razy, rzeczywiście dostajemy (z dokładnością do parzystości na ostatnim miejscu) kolejną cyfrę rozwinięcia dziesiętnego π. Przy okazji, jeśli będziemy zwiększać stosunek mas ciał nie 100, ale, na przykład, 49 albo 169 razy, też dostaniemy kolejne cyfry rozwinięcia π, tylko w systemie siódemkowym albo trzynastkowym.

Małą Deltę przygotowali Marcin KOTOWSKI i Michał KOTOWSKI